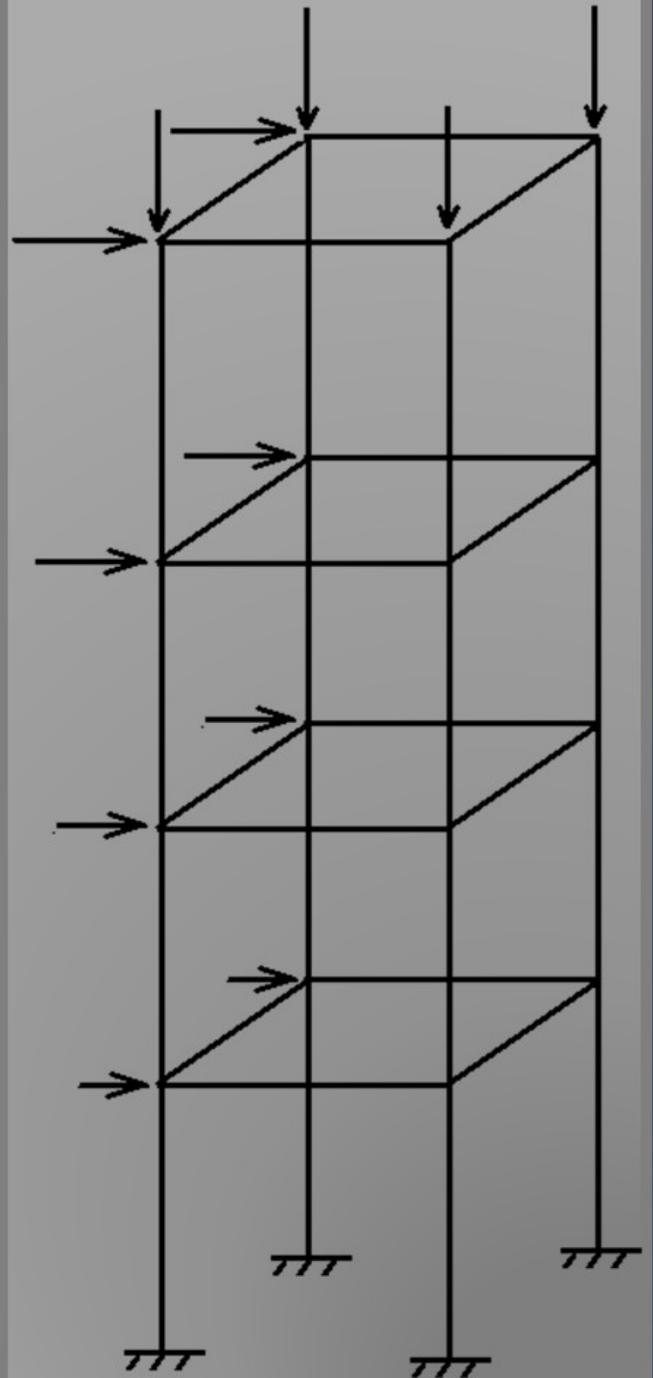


ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS RETICULARES



ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS RETICULARES

TA645

D1115

2016

Da Fonseca, Zeferino

Análisis matricial de estructuras reticulares / Zeferino Da Fonseca -- Maracaibo: Fondo Editorial Biblioteca, 2016.

xv, 263 p.: il.

ISBN 978-980-7131-17-9

Depósito Legal: lf06120166001238

Incluye bibliografía

Incluye apéndice

Publicado en forma electrónica en formato PDF

I .TITULO II. INGENIERÍA CIVIL III. INGENIERÍA DE ESTRUCTURAS

Universidad Rafael Urdaneta

Autoridades Universitarias

Dr. Jesús Esparza Bracho, Rector

Ing. Maulio Rodríguez Figueroa, Vicerrector Académico

Ing. Salvador Conde, Secretario

Lcda. Aída Rincon, Directora de Biblioteca

Lcda. Hosglas Sanchez, Subdirectora del Fondo Editorial Biblioteca

Primera edición, mayo 2016

© 2016 Zeferino da Fonseca

Portada: Zeferino da Fonseca

Diseño y maquetación: Lcda. Hosglas Sanchez

Catalogación y Clasificación: Lcda. Mileyda Briceño

Universidad Rafael Urdaneta, Fondo Editorial Biblioteca

Vereda del Lago, Maracaibo, Venezuela

ISBN: 978-980-7131-17-9

Depósito Legal: lf06120166001238



FONDO EDITORIAL BIBLIOTECA

Universidad Rafael Urdaneta

Zeferino da Fonseca

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS RETICULARES



Universidad **R**afael **U**rdaneta

Ut tensio sic vis

Robert Hooke

NOTA PREVIA:

Este texto fue escrito inicialmente, como notas de aula, con la finalidad de servir de material de estudio para los estudiantes de la asignatura electiva "Tópicos Especiales en Ingeniería Mecánica", de la Escuela de Ingeniería Mecánica, de la Facultad de Ingeniería, de la Universidad del Zulia, en el año 2006. Desde entonces los temas tratados han sido reestructurados y ampliados hasta la versión actual.

Zeferino da Fonseca

PREFACIO

Una de las responsabilidades de ingeniero estructural consiste en proyectar el dimensionamiento de los elementos estructurales y disponerlos de tal modo que puedan resistir, económica y eficientemente, las condiciones que se anticipan durante la vida útil de la estructura. Un aspecto central de esta función está asociado a la determinación de los desplazamientos en los puntos de interés de la estructura, así como también el cálculo de la distribución de fuerzas en el interior de dichos elementos.

En este texto se abordan los temas relacionados con el análisis matricial de estructuras. Aun cuando este método de análisis se puede aplicar independientemente del tipo de estructura, sólo se estudian aquellas que están conformadas por elementos reticulares; es decir, elementos uniformes y con la dimensión longitudinal mucho más grande que sus dimensiones transversales.

Las relaciones entre las fuerzas y los desplazamientos de una estructura se pueden obtener de distintas maneras. En este texto dichas relaciones se deducen utilizando, únicamente, los principios básicos de la estática y de la mecánica de materiales. Por tal motivo, su aplicación está restringida a estructuras que están conformadas por elementos de geometrías simples, como barras, vigas y pórticos. Sin embargo, muchas estructuras pueden idealizarse con estos tipos de elementos de forma apropiada.

El análisis matricial de estructuras puede realizarse mediante el método de flexibilidad (o de las fuerzas), o el método de rigidez (o de desplazamientos). A pesar que el uso del primero de estos métodos puede tener, en ciertas circunstancias, algunas ventajas, su implementación computacional es mucho más compleja que el segundo. Por tal motivo, en este curso se estudian, fundamentalmente (en el Capítulo III se hace una breve introducción del método de flexibilidad), los aspectos teóricos y computacionales del método de rigidez.

El autor cree firmemente que la programación computacional es una parte importante de este curso. Naturalmente, no se espera que el estudiante pueda escribir un programa computacional eficiente; sin embargo, la comprensión de los diferentes pasos y algoritmos asociados a un programa de esta naturaleza, ayuda eficazmente a resolver en forma manual los problemas más simples. Por tal motivo, en el Capítulo IV, se detallan los distintos pasos que envuelven la aplicación computacional del método de rigidez. Por el mismo motivo, al final de cada tópico se resuelve (“a mano”) un ejemplo y, en seguida, se presenta la solución del mismo mediante el programa computacional que acompaña estas notas.

En la actualidad existen numerosos programas computacionales comerciales, de variable sofisticación, dedicados al análisis estructural los cuales, en general, requieren apenas de algunos pocos datos de entrada para realizar el análisis de una estructura dada. Con estas poderosas herramientas

de cálculo a su disposición, es natural que el estudiante de ingeniería civil cuestione la utilidad, o aún la necesidad, de estudiar los procedimientos ya programados que soportan dichos programas. La respuesta a esta cuestión está en las responsabilidades que debe asumir el ingeniero de diseño estructural. Las decisiones que debe tomar, desde la descripción analítica de la estructura, la correcta evaluación del análisis numérico de la misma y la interpretación de resultados, no es responsabilidad del programa computacional utilizado.

El ingeniero estructural debe entender los principios del análisis estructural y los procesos matemáticos que éstos encierran. Sólo de este modo podrá hacer un correcto y eficiente uso de los programas computacionales existentes, los cuales son, apenas, herramientas que permiten realizar los procesos numéricos de una forma más rápida y eficiente, pero no libera al ingeniero de la responsabilidad del diseño de una estructura. Es necesario entender que, aunque la ejecución no exija necesariamente comprensión, ni ejecución ni comprensión aisladas son suficientes.

Así que, en este texto el lector encontrará los fundamentos del análisis matricial de estructuras, así como también, con especial énfasis, los aspectos computacionales relacionados con un programa general de cálculo estructural. Se ha tratado, sin embargo, que éstos no oscurezcan el tópico o principio fundamental en estudio.

En el Capítulo I se ofrece un breve resumen de la historia de análisis estructural. En el capítulo II se abordan los conceptos fundamentales de dicho análisis. En el Capítulo III se introducen los métodos de flexibilidad y de rigidez. En el Capítulo IV se desarrolla los aspectos fundamentales del método de rigidez. En el Capítulo V se deducen las matrices locales de rigidez de los elementos de estructuras reticulares y se introduce el concepto del vector de cargas nodales equivalentes. En el Capítulo VI se analizan algunos efectos especiales que se presentan frecuentemente en el análisis estructural: efectos térmicos, errores de fabricación, apoyos elásticos, apoyos inclinados, combinación de diferentes elementos en un modelo estructural y discontinuidades en los elementos. Adicionalmente se aborda el proceso de la llamada condensación estática y el cálculo estructural mediante subestructuras. Finalmente, en el Capítulo VII se formula el método de rigidez de un modo general; es decir, a través de una aproximación matemática.

Zeferino da Fonseca

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

PROF. Zeferino da Fonseca L.

Resumen

En este texto se presentan los aspectos fundamentales del análisis matricial de estructuras reticulares, asociados con el método de los desplazamientos (directo o de rigidez). Se deducen las matrices locales de rigidez de cada elemento estructural empleando, únicamente, los principios básicos de la mecánica de materiales y, posteriormente, se deducen dichas matrices a partir de un enfoque matemático.

El curso hace hincapié en los aspectos computacionales del método de los desplazamientos: sistemas de referencia local y global, matrices de transformación entre estos dos sistemas, construcción de las matrices locales de rigidez, matriz global de rigidez, introducción de las condiciones de contorno, solución del sistema de ecuaciones algebraicas simultáneas resultante y pos-procesamiento. Estos aspectos se enfatizarán con el uso del programa computacional AER desarrollado por el autor.

CONTENIDO

Nota previa	xi
Prefacio	xiii
Resumen	xv
Contenido	xvi
I.- Introducción	
1.1.- Un breve resumen de la historia del análisis estructural	1
1.2.- ¿Qué es y para qué sirve el análisis estructural?	4
II.- Conceptos fundamentales del análisis estructural	
2.1.- Introducción	7
2.2.- Tipos de estructuras reticulares	7
2.3.- Desplazamientos y de deformaciones	9
2.4.- Equilibrio estático	11
2.5.- Condiciones de compatibilidad	13
2.6.- Principio de superposición	13
III.- Introducción a los métodos de flexibilidad y rigidez	
3.1.- Introducción	17
3.2.- El método de flexibilidad	17
3.3.- El método de rigidez	41
3.4.- Comparación de los métodos de flexibilidad y rigidez	58
IV.- Aspectos computacionales del método de rigidez	
4.1.- Introducción	63
4.2.- Nodos y grados de libertad	63
4.3.- Definición de coeficiente de rigidez	64
4.4.- Matriz local de rigidez	67
4.5.- Ensamblaje de las matrices locales de rigidez	69
4.6.- Procedimiento general del ensamblaje	71
4.7.- Características de la matriz ensamblada	72
4.8.- Introducción de las condiciones de contorno	74
V.- Elementos estructurales reticulares	
5.1.- Introducción	81
5.2.- Elemento: Axial Uniforme	81
5.2.1.- Ejemplo de elementos unidimensionales sometidos a carga axial	83
5.2.2.- Vector de Cargas Nodales Equivalentes	86
5.3.- Elemento: Armadura Plana	88
5.3.1.-Introducción	88
5.3.2.-Hipótesis asumidas en el análisis de armaduras planas	88
5.3.3.- Efecto de las hipótesis asumidas	89
5.3.4.- Transformación de coordenadas	89
5.3.4.a.- Transformación de vectores en dos dimensiones	90
5.3.5.- Matriz local de rigidez de un elemento de armadura plana	93
5.3.6.- Matriz global de rigidez de un elemento de armadura plana	94

5.3.7.- Ejemplo de una armadura plana sometida a un estado de cargas	96
5.4.- Elemento: Viga de Eje Recto	102
5.4.1.- Introducción	102
5.4.2.- Elemento de viga de eje recto	102
5.4.3- Vector de cargas nodales equivalentes para elementos de viga de eje recto	106
5.4.4.- Ejemplo de una viga continua de eje recto	107
5.5.- Elemento: Pórtico Plano	114
5.5.1.- Introducción	114
5.5.2.- Elemento de pórtico plano	114
5.5.4.- Ejemplo de pórtico plano	116
5.6.- Elemento: Parrilla	122
5.6.1- Introducción	122
5.6.2.- Elemento de parrilla	122
5.6.3.- Transformación de coordenadas para el elemento parrilla	127
5.6.4.- Cargas sobre los elementos parrilla	128
5.6.5.- Ejemplo de estructura con elementos de parrilla	128
5.6.6.- Ejemplo de estructura con elementos parrilla	132
5.7.- Elemento: Armadura Espacial	134
5.7.1.- Introducción	134
5.7.2.- Elemento de armadura espacial	135
5.7.3.- Transformación de coordenadas.	135
5.7.4.- Ejemplo 1 de una estructura de armadura espacial	138
5.7.5.- Ejemplo 2 de una estructura de armadura espacial	143
5.8.- Elemento: Pórtico Espacial	145
5.8.1.- Introducción	145
5.8.2.- Matriz de local de rigidez del elemento de pórtico espacial	146
5.8.3.- Transformación de coordenadas	147
5.8.4.- Ejemplo de estructura de pórtico espacial	151
VI.- Tópicos especiales en el análisis matricial de estructural	
6.1.- Introducción	159
6.2.- Efectos térmicos	159
6.3.- Errores de fabricación	170
6.4.- Apoyos elásticos	174
6.5.- Apoyos inclinados	187
6.6- Combinación de diferentes elementos en un modelo estructural	202
6.7.- Condensación estática	209
6.8.- Sub-estructuras	214
6.9.- Discontinuidad en los elementos	228
6.10.- Elementos no uniformes	240
VII.- Formulación general del método directo	
7.1.- Introducción	245
7.2.- Elemento uniforme axial	245
7.3.- Elemento de viga de eje recto	248
Apéndices	255
Bibliografía	261

I.- INTRODUCCIÓN

1.1.- Un breve resumen de la historia del análisis estructural

“Si he sido capaz de ver un poco más lejos que otros, fue porque estuve sostenido en hombros de gigantes”. Así escribió Sir Isaac Newton (1642-1727), autor de uno de los más grandes libros científicos de todos los tiempos, en su “Philosophiae Naturalis Principia Mathematica”, o más comúnmente, su “Principia”. De este modo reconoció él su deuda con los grandes hombres de la ciencia que le precedieron.

En nuestra era, hemos heredado un legado científico infinito, tan grande como el recibido por Sir Isaac Newton. Durante más de dos siglos desde su época, el progreso ha sido constantemente acelerado. Al principio, intervalos de décadas e incluso siglos, separaron el descubrimiento de verdades fundamentales y principios básicos. Cada generación, “sostenida sobre los hombros” de quienes pasaron antes, alcanzaron nuevas alturas y vislumbraron nuevos horizontes. Cada nuevo descubrimiento apresuró el paso y aclaró otros caminos. A lo largo de los siglos, las implicaciones de conocer nuevas verdades fueron exploradas, y todo el conocimiento fue ensamblado dentro de un diseño general que constituye la ciencia de nuestro tiempo.

Se requirieron cinco mil años para descubrir y organizar adecuadamente los principios mecánicos estructurales los cuales son, actualmente, aprendidos por los estudiantes de ingeniería en algunas semanas. Otros doscientos años fueron necesarios para depurar y extender estos principios a su estado actual. El incesante esfuerzo y dedicación de grandes mentes, a través de los años, ha dado como resultado la moderna teoría estructural.

La manera como existieron las cosas en el principio, está escondida en las nieblas de la era pre-histórica. En algún tiempo, de alguna manera, durante los siglos precedentes, al principio de la historia, el hombre inventó máquinas simples. La primera luz permitida por las memorias, lo muestra en posesión del conocimiento del plano inclinado, la cuña, el tornillo, la palanca, la polea, la rueda y el eje.

En el tiempo en que Aristóteles escribió su libro sobre máquinas (384 a.c-322 a.c), los seis elementos nombrados anteriormente habían sido por siglos conocidos y sus orígenes olvidados.

Arquímedes (287-212 a.c) introdujo el concepto de centro de gravedad, y llevó a su más simple expresión los principios fundamentales de la estática y el equilibrio. Se ha dicho que durante toda la historia, sólo se ha añadido una máquina más a las conocidas por el hombre pre-histórico: la prensa hidráulica de Pascal en 1650.

Los escritos sobre el análisis estructural se han encontrado, solamente, después del Renacimiento, y puede dividirse en las siguientes categorías:

La era de los grandes maestros:

Esta es la era de Leonardo da Vinci (1452-1519), Galileo Galilei (1564-1642), Fontana (1543-1607) y Sinan (1490-1588). Son dignos de mención la cúpula de San Pedro de da Vinci (quien también introdujo los conceptos de fuerza y momento), el libro de Galileo “Dos Nuevas Ciencias”, en el cual abordó la teoría de la viga en voladizo, y los esbeltos minaretes de Sinan con gran capacidad de resistencia a sismos.

La era de los grandes matemáticos:

En esta era, los matemáticos Hooke (1635-1703), Johann Bernoulli (1667-1748), Daniel Bernoulli (1700-1783), Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813), muchos otros, mostraron interés en la mecánica estructural. Ellos establecieron los principios fundamentales de los conceptos de energía, las ecuaciones constitutivas (relaciones esfuerzos-deformaciones) y las relaciones entre los desplazamientos y las deformaciones. Su interés estuvo centrado, fundamentalmente, en la teoría de la elasticidad y sus hallazgos, tales como la ley de Hooke, la ecuación de Bernoulli asociada a la vibración de barras, la ecuación relacionada con el pandeo de columnas desarrollada por Euler y las ecuaciones que gobiernan la flexión de placas deducida por Lagrange, contribuyeron, sin duda, a la teoría de la mecánica estructural.

La era de los grandes ingenieros:

Ésta puede considerarse como la edad de oro de la ingeniería estructural. Hombres tales como Navier (1785-1836), Saint Venant (1797-1886), Clapeyron (1799-1918), Airy (1801-1892), Maxwell (1831-1879), Castigliano (1847-1884), Mohr (1835-1918) y Muller-Breslau (1851-1925), utilizaron exitosamente las fórmulas matemáticas desarrolladas en la era anterior en la solución de problemas estructurales. Ellos pueden considerarse más como ingenieros que como matemáticos, aunque sus conocimientos en las ciencias matemáticas fueron sobresalientes. Sus formulaciones y teoremas fueron la base para el desarrollo de la mecánica estructural en la era moderna.

La era moderna:

A comienzos del siglo XX, hombres como Maney (1888-1947), Cross (1885-1959), entre otros (Southwell, Kang, etc.), comprendieron que eran necesarios métodos mucho más prácticos para analizar estructuras complejas. Ellos introdujeron los métodos de las ecuaciones pendiente-deflexión, distribución de momentos, entre otros. Cada uno de los métodos desarrollados establece hipótesis que simplifican el cálculo para obtener la solución, con ciertas aproximaciones, de problemas estructurales complejos.

La era contemporánea:

Hacia la mitad del siglo XX se desarrollaron equipos de cálculo poderosos, tales como los computadores analógicos y digitales, y los ingenieros fueron impulsados a establecer métodos que requirieran menos suposiciones en la formulación de la solución de los problemas, logrando así mejores resultados. De esta forma fue introducido el “método matricial” de análisis de estructuras.

Las ideas de este método no eran nuevas para la época; están estrechamente relacionadas con los principios establecidos por Castigliano, Maxwell y Muller-Breslau. La única razón por la que este nuevo método no fue completamente desarrollado y utilizado en la época de estos investigadores, se debe a que éste conlleva la solución de grandes sistemas de ecuaciones algebraicas simultáneas. Aun para una pequeña y simple estructura, el número de ecuaciones a resolver es de tal magnitud que su solución, sin el concurso del computador es imposible

El análisis matricial de estructuras

¿Quién fue el primero en escribir sobre la rigidez o flexibilidad matricial?. Esta interrogante fue plasmada en un ensayo en el año 1995^[1]. La respuesta natural fue “alguien trabajando en la industria aeronáutica de Inglaterra o Alemania, entre los años 1920 y 1930. Desde entonces, varios autores han examinado reportes y publicaciones de la época. Para el grupo de Aeroelasticidad del Laboratorio Físico Nacional de Teddington, un pueblo convertido ahora en un suburbio de Londres, estas pistas representan el origen del Análisis Matricial de Estructuras.

La evolución del análisis matricial de estructuras (AME) ocurre entre 1930 y 1970, y se debe, fundamentalmente, a cuatro autores: Collar y Duncan, Argyris y Turner. Sus contribuciones se consolidaron como piedras angulares de esta área del análisis estructural. Las cuatro décadas de evolución del AME pueden sintetizarse del siguiente modo:

- *Creación:* A principios de los años 30, A. R. Coolar y W. J. Duncan formularon la teoría de la aeroelasticidad en forma matricial. Los primeros dos artículos sobre este tópico surgieron en 1934-1935 y el primer libro en el año 1938, en coautoría con R. A. Frazer. La representación y terminología usadas para describir los sistemas dinámicos discretos es, esencialmente, la misma de hoy en día.
- *Unificación:* Entre 1954 y 1955, en una serie de artículos, Argyris presentó una unificación formal de los métodos de fuerza y desplazamiento, usando teoremas de energía dual. Si bien las aplicaciones prácticas de la dualidad resultaron efímeras, este trabajo sistematizó el concepto del ensamblaje del sistema de ecuaciones de la estructura, a partir de las ecuaciones asociadas a cada elemento que conforma la estructura.
- *Iniciación del método de los elementos finitos:* En 1959 M. J. Turner propuso el método de rigidez como una eficiente y general implementación del entonces, en fase embrionaria y aún sin nombre, “método de los elementos finitos”. Posteriormente, en 1962, este último método fue, detalladamente presentado M. J. Turner, H. C. Martin y R. C. Weikel. A partir de entonces, el método del método de los elementos finitos ha venido siendo extensamente utilizado, en todas las áreas de la ingeniería y de las ciencias en general.

1.2.- ¿Qué es el análisis estructural y para qué sirve?

El análisis estructural es una rama de las ciencias físicas que estudia el comportamiento de las estructuras bajo determinadas condiciones de diseño.

Las *estructuras* se definen como los sistemas que soportan cargas, y la palabra *comportamiento* se entiende como su tendencia a deformarse, vibrar, pandearse o fluir, dependiendo de las condiciones de carga a que estén sometidas. La vibración, el pandeo y la fluencia (que se espera que nunca ocurra), son temas que están fuera del alcance de este curso.

Los resultados del análisis estructural son usados para determinar la forma de las estructuras deformadas, y verificar si son adecuadas para soportar las cargas para las cuales se han diseñado.

El análisis de estructuras se reduce, en sí, a la determinación de los estados de deformación y esfuerzos de los elementos que componen una estructura dada. Puesto que los esfuerzos son los valores que limitan las fuerzas internas, una vez realizado dicho análisis, sólo resta evaluar dichas fuerzas.

La ingeniería estructural trata, fundamentalmente, sobre tres temas básicos:

- a.- El análisis estructural.
- b.- El análisis de esfuerzos.
- c.- El diseño estructural.

Estos tres aspectos de la ingeniería estructural, a pesar de estar interrelacionados, son tan distintos entre sí que, en la secuencia de un proyecto estructural, se estudian independientemente. La Fig.1.1 muestra dicha interrelación.

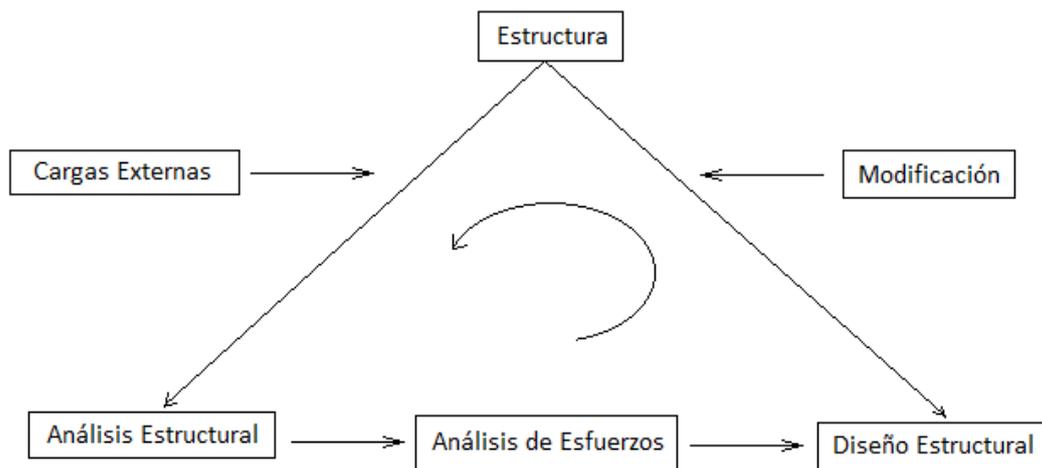


Fig. 1.1 Secuencia de las etapas en el diseño estructural

Mientras que el análisis estructural se basa en los *principios de la estática*, el análisis de los esfuerzos se aborda en materias tales como *la mecánica de materiales y la teoría de la elasticidad*, el diseño estructural asegura que en ningún punto de ningún elemento estructural se desarrollan esfuerzos que excedan los límites permitidos. Para lograr esto, si es necesario, se modifica el

diseño, haciendo que el análisis se repita, nuevamente, en el ciclo mostrado en la figura anterior, hasta que no se requiera modificación alguna.

De acuerdo con la Fig.1.1, el fin que se persigue es el de *diseñar* una estructura y el análisis estructural es una de las *herramientas* para alcanzar tal fin.

Independientemente del método de análisis, el resultado es único, y depende solamente de las condiciones iniciales. Los datos iniciales en el análisis estructural, y los resultados finales se ilustran en la Fig. 1.2.

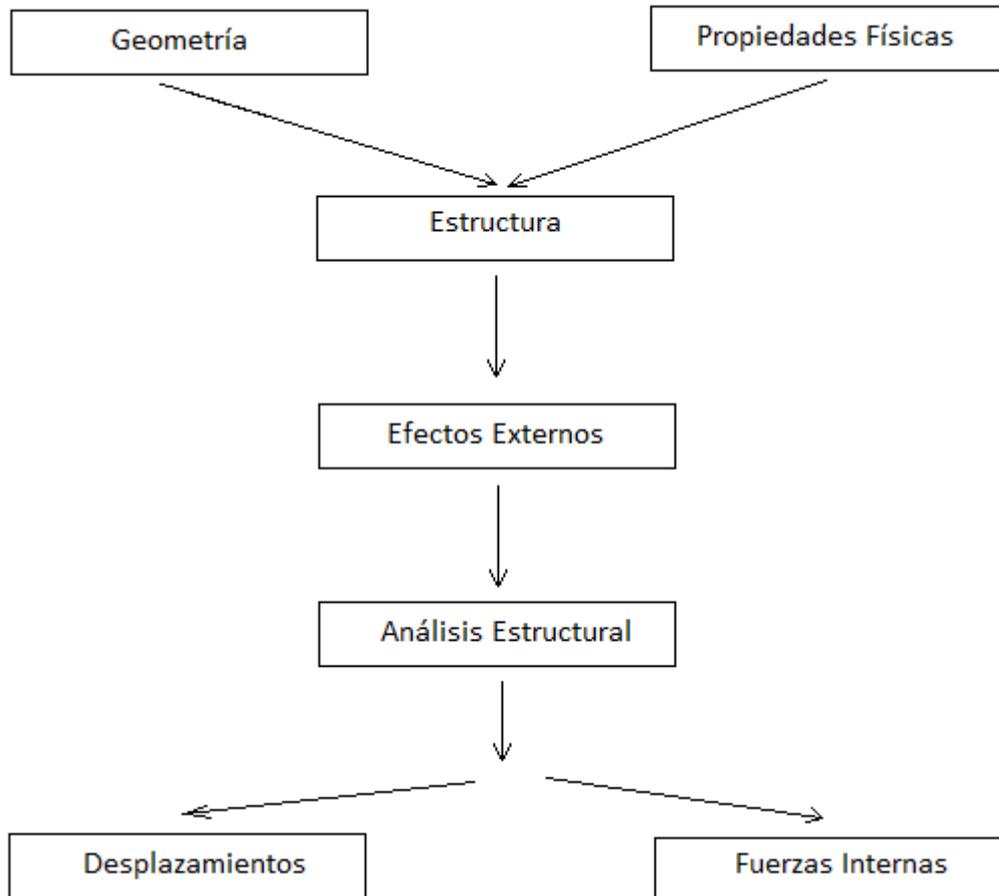


Fig. 1.2. Condiciones iniciales y resultados en el análisis estructural

Una estructura se define por su geometría y por las propiedades físicas (área y momento de inercia de la sección transversal; módulos de elasticidad y de corte, coeficiente de Poisson, etc.), de los elementos.

Los efectos externos que pueden actuar sobre la estructura consisten en cargas vivas (viento, tránsito, nieve, personas, etc.), cargas muertas (todas las cargas estacionarias, incluyendo el peso propio de la estructura), y otros efectos (temperatura, asentamiento de los apoyos, falta de sujeción, etc.).

El análisis estructural no tiene que ver ni con la selección de los datos iniciales, ni con el uso de los resultados finales. Se supone, por lo tanto, que la estructura a analizar, y los efectos externos que actúan sobre ella, están definidos de antemano en forma precisa.

II.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DEL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

2.1.- Introducción

Los métodos fundamentales disponibles para el analista estructural son el método de la flexibilidad (o de las fuerzas), y el método de la rigidez (o de los desplazamientos) También se les conocen como los métodos de equilibrio y compatibilidad, respectivamente. Ambos métodos son aplicables a estructuras de todos tipos. Sin embargo, en este curso sólo se analizarán las estructuras reticulares.

Antes de comenzar el estudio de los métodos de flexibilidad y rigidez, se considerarán varios temas preliminares. Estos temas incluyen una descripción de los tipos de estructura a estudiar y la discusión de varios conceptos, tales como acciones, desplazamientos, deformaciones, equilibrio estático, condiciones de compatibilidad y el principio de superposición.

2.2.-Tipos de estructuras reticulares

Todas las estructuras que se analizarán en este curso se llaman “estructuras reticulares” y pueden dividirse en seis categorías: vigas, armaduras planas, armaduras espaciales, pórticos planos, parrillas y pórticos espaciales. Estos tipos de estructuras se muestran en la Figura 2.1. Posteriormente se describirán en detalle. Estas categorías fueron seleccionadas debido a que cada una representa una clase de estructura con características especiales. Aún más, como los principios básicos de los dos métodos ya mencionados son los mismos para todos los tipos de estructuras, los análisis de estas seis categorías son lo suficientemente diferentes en detalles como para justificar una discusión independiente para cada una de ellas.

Cada estructura reticular está formada por elementos (o miembros) que son largos en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Los “nodos” de una estructura reticular son puntos de intersección de los elementos, así como los puntos de apoyo de los elementos y los puntos de los extremos de un elemento.

Ejemplos de nodos son los puntos A, B, C y D de las Figuras 2.1a y 2.1c. Los apoyos pueden ser del tipo “empotrado”, como el soporte A de la viga de la Fig. 2.1a, o “articulado” como se muestra en el soporte A del pórtico plano de la Fig. 2.1c, o puede ser “deslizante”, ilustrado por los apoyos B y D de la Fig. 2.1a.

En casos especiales, las conexiones entre los elementos o entre los elementos y apoyos, pueden ser elásticas (o semirígidas). La discusión de esta posibilidad se tratará posteriormente.

* En este curso, en general, se supondrá que los elementos estructurales son prismáticos; es decir, cada elemento tiene un eje recto y una sección transversal constante en toda su longitud. Los miembros no prismáticos se abordarán en un tema aparte.

Las “cargas” en una estructura reticular pueden ser fuerzas concentradas, cargas distribuidas o pares (flectores o torsores). A continuación se detallará la característica principal de cada tipo de estructura mostrada en la Fig. 2.1.

- *Viga*: Una viga (Fig. 2.1a) está formada por un elemento recto que tiene uno o más puntos de apoyo, tales como los puntos A, B y D. Las fuerzas que se aplican a una viga se supone que actúan en un plano que contiene un eje de simetría de la sección transversal de la viga (un eje de simetría es también un eje principal de la sección transversal). Aún más, todos los pares exteriores que actúan sobre la viga tienen sus vectores de momento normales a ese plano, y la viga se deforma en el mismo plano (el plano de flexión) y no sufre torsión. En cualquier sección transversal de la viga existirán fuerzas internas y, en el caso general, pueden aparecer una fuerza cortante y un par flector.

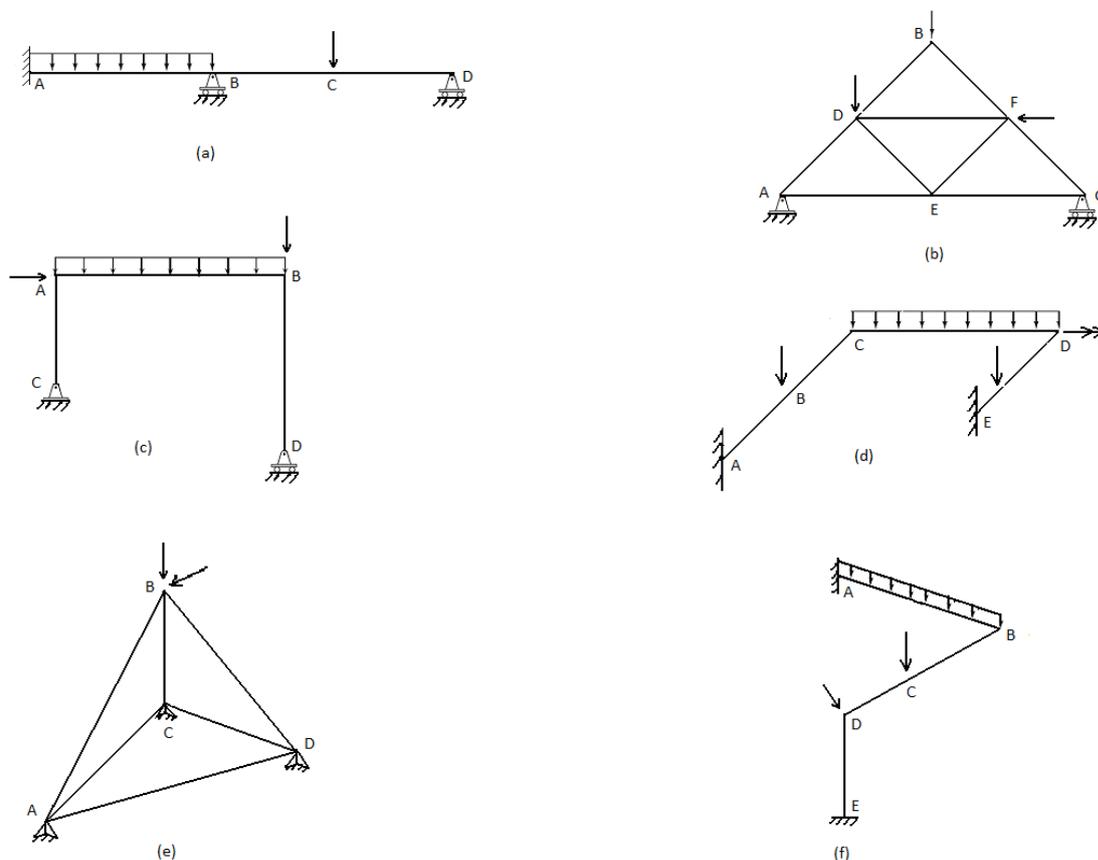


Fig. 2.1. Tipos de estructuras reticulares; (a) viga; (b) armadura plana; (c) armadura espacial; (d) pórtico plano; (e) parrilla; (f) pórtico espacial

- *Armadura plana*: Una armadura plana (Fig. 2.1b) se idealiza como un sistema de elementos en un plano, interconectados en juntas (nodos) articuladas. Se considera que todas las fuerzas que actúan sobre una armadura están en el plano de la estructura, y todos los pares externos tienen sus vectores de momentos normales al plano (como en el caso de la viga). Las cargas pueden consistir de fuerzas concentradas aplicadas a los nodos, así como cargas que actúan sobre los elementos. Los elementos de una armadura plana están sometidos, únicamente, a fuerzas de tensión o de compresión.

- *Pórtico Plano*: Un pórtico plano (Fig. 2.1c) está compuesto por elementos en un solo plano que tienen su eje de simetría en el mismo plano. Los nodos entre los elementos (tales como los nodos B y C), son conexiones rígidas. Las fuerzas que actúan en un pórtico y los desplazamientos del mismo están en el mismo plano de la estructura. Todos los pares que actúan sobre el pórtico tienen sus vectores de momento normales al plano. Las fuerzas internas resultantes que actúan en cualquier sección de un elemento de un pórtico plano consisten, en general, de una fuerza axial, un par flector y una fuerza cortante.

- *Parrilla*: Una parrilla (Fig. 2.1d) es una estructura plana compuesta por elementos continuos que se intersectan o se cruzan. En el último caso, las conexiones entre los elementos se consideran, a menudo, como articuladas, en tanto que en el primer caso, las conexiones se consideran rígidas.

Mientras que en el pórtico plano las fuerzas externas están, todas, en el plano de la estructura, en el caso de una parrilla, todas las fuerzas actúan perpendicularmente al plano de la misma. Esta orientación de la carga puede dar como resultado torsión así como también flexión en algunos elementos. Se considera que cada elemento tiene dos ejes de simetría en su sección transversal, de modo que la flexión y la torsión son independientes. En una sección transversal de un elemento de parrilla, en general, se generará una fuerza cortante, un momento flector y un momento torsor.

- *Armadura espacial*: Una armadura espacial (Fig. 2.1e) es similar a una armadura plana, excepto que sus elementos pueden tener cualquier dirección en el espacio. Las fuerzas que actúan sobre una armadura espacial pueden tener direcciones arbitrarias, pero cualquier par aplicado en un elemento de la misma, debe tener su vector momento perpendicular al eje del elemento. La razón de este requerimiento es que un elemento de una armadura es incapaz de soportar un momento torsor.

- *Pórtico espacial*: Un pórtico espacial (Fig. 2.1f) es el tipo más general de una estructura reticular, tanto, que no hay restricciones en la posición de los nodos, direcciones de los elementos o de las cargas. Los elementos de un pórtico espacial pueden soportar fuerzas axiales, pares torsores, pares flectores en las dos direcciones principales de la sección transversal, y fuerzas cortantes en las dos direcciones principales. Se considera, igual que en el caso de un elemento de parrilla, que un elemento de pórtico espacial tiene dos planos de simetría.

2.3.-Desplazamientos y deformaciones

Cuando una estructura está bajo la acción de fuerzas, los elementos que lo constituyen sufren “deformaciones” (o pequeños cambios en su forma) y, como consecuencia, cualquier punto de la estructura se desplazará hacia una nueva posición. En general, todos los puntos de la estructura, excepto los puntos de apoyo inmóviles, sufrirán dichos desplazamientos. El cálculo de estos

desplazamientos es una parte esencial del análisis estructural. Sin embargo, antes de considerar los desplazamientos es necesario comprender las deformaciones que producen los desplazamientos.

Considérese en primer lugar, un segmento de longitud arbitraria cortado de un elemento de una estructura reticular, tal como se muestra en la Fig. 2.2a. Por simplicidad se considera que el elemento es de sección transversal circular. En cualquier sección transversal, tal como el extremo de la derecha del segmento, en el caso más general aparecerá tres fuerzas y tres pares. Las fuerzas son la fuerza axial P , y las fuerzas cortantes V_y y V_z ; los pares son el par torsor M_x y los pares flectores M_y y M_z .

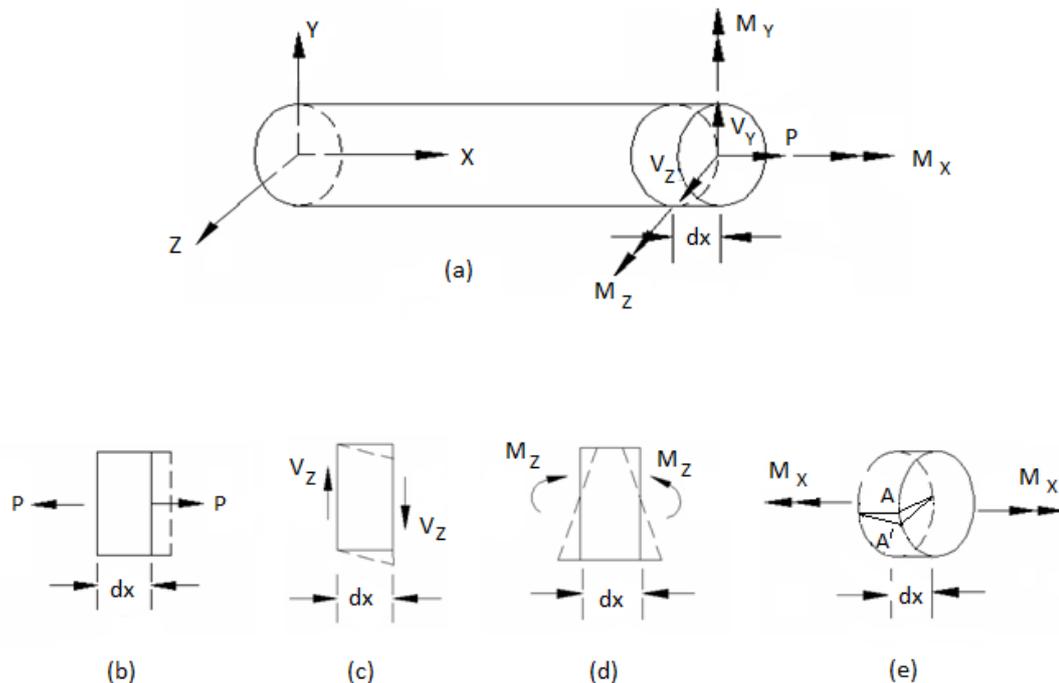


Fig. 2.2. Tipos de deformaciones; (a) axial; (b) cortante; (c) flexión; (e) torsión

Las deformaciones del elemento pueden analizarse tomando separadamente cada resultante (fuerza o par) y determinar su efecto sobre un elemento del mismo.

El efecto de la fuerza axial M_x sobre el elemento se muestra en la Fig. 2.2b. Suponiendo que la fuerza actúa sobre el centroide de la sección transversal, se encuentra que el elemento se deforma uniformemente, y las deformaciones significativas del elemento son deformaciones normales en la dirección x .

En el caso de una fuerza cortante (Fig. 2.2c), una sección transversal de la barra se desplaza lateralmente con respecto a la otra. También pueden existir distorsiones de las secciones transversales, pero éstas tienen un efecto despreciable en la determinación de los desplazamientos y se pueden ignorar.

Un par flector (Fig. 2.2d) causa una rotación relativa de las dos secciones transversales provocando que ya no queden paralelas una a otra.

Las deformaciones resultantes en el elemento son en la dirección longitudinal del elemento y consisten en una contracción en el lado de compresión y una extensión en el lado de tensión.

Finalmente, el par torsor (Fig. 2.2e) causa una rotación relativa de las dos secciones transversales alrededor del eje x y, por ejemplo, el punto A se desplaza a A'. En el caso de un elemento de sección transversal circular, la torsión produce sólo deformaciones de cortante y las secciones transversales permanecen planas. Para otras formas de las secciones transversales sí ocurrirán distorsiones en ellas.

2.4.- Equilibrio estático

Uno de los objetivos de cualquier análisis estructural es determinar las fuerzas internas resistentes (fuerza axial, cortante, momento flector, momento torsor), las reacciones en los apoyos. Una solución correcta para cualquiera de estas variables debe satisfacer todas las condiciones de equilibrio estático, no sólo para toda la estructura, sino también para cualquier parte de ella tomada como un cuerpo libre.

Considérese el cuerpo libre mostrado en la Figura 2.3 el cual está sujeto al conjunto de acciones externas indicado. La resultante de todas las acciones puede ser una fuerza, un par o ambos. Si el cuerpo libre está en equilibrio estático, la resultante desaparece; es decir, el vector fuerza resultante y el vector momento resultante son, ambos, cero. Un vector en un espacio tridimensional puede, siempre, descomponerse en tres componentes, en tres direcciones ortogonales, tales como las direcciones x, y, z.

Si el vector fuerza resultante es igual a cero, también sus componentes deben ser igual a cero y, por lo tanto, se deben verificar las siguientes ecuaciones de equilibrio estático:

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0 \quad (2.1a)$$

En estas ecuaciones, las expresiones $\sum F_x$, $\sum F_y$, $\sum F_z$ son las sumas algebraicas de las componentes en x, y, z, respectivamente, de todos los vectores fuerza que actúan sobre el cuerpo libre. De igual modo, si el vector momento resultante es igual a cero, las ecuaciones de momento de equilibrio estático son:

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_z = 0 \quad (2.1b)$$

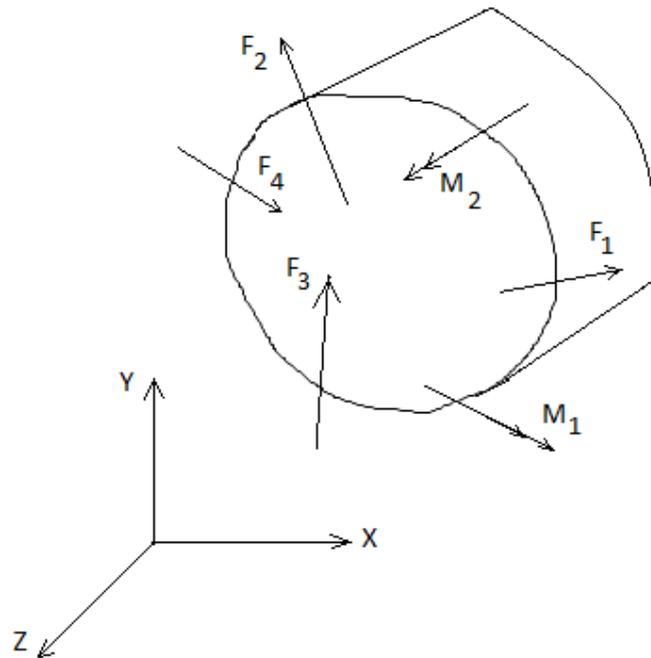


Figura 2.3. Cuerpo sujeto a un estado de carga arbitrario asociado al sistema de referencia X-Y-Z

donde, ahora, ΣM_x , ΣM_y , ΣM_z son las sumas algebraicas de los momentos respecto a los ejes x , y , z , respectivamente, de todos los pares y fuerzas que actúan sobre el cuerpo libre.

Las seis relaciones de la ec. (2.1) representan las ecuaciones de equilibrio estático que deben ser satisfechas por un cuerpo tridimensional. Pueden aplicarse a cualquier cuerpo libre, tal como una estructura, una parte de ella, un único elemento, o un nodo de una estructura.

Cuando todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo libre están en un plano, tal como se muestra en la Fig.2.4, y todos los pares tienen sus vectores normales a ese plano, sólo son útiles tres de las seis ecuaciones de equilibrio estático anteriores.

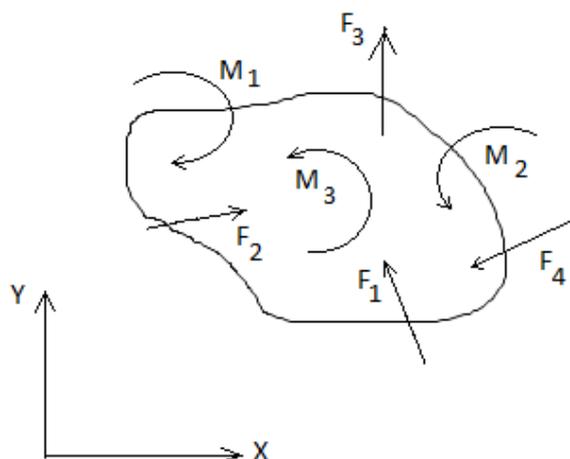


Figura 2.4. Cuerpo sujeto a un estado de carga arbitrario en el plano x-y

Suponiendo que las fuerzas están en el plano x-y, es obvio que las ecuaciones $\Sigma F_z = 0$, $\Sigma M_x = 0$ y $\Sigma M_y = 0$, se satisfacen automáticamente. Las ecuaciones restantes son:

$$\Sigma F_x = 0; \Sigma F_y = 0; \Sigma M_z = 0 \quad (2.2)$$

y estas ecuaciones son las condiciones de equilibrio estático para acciones en el plano x-y.

2.5.-Condiciones de compatibilidad

Además de las condiciones de equilibrio estático, es necesario, en cualquier análisis de estructuras, que se satisfagan todas las condiciones de compatibilidad. Estas condiciones se refieren a la continuidad de los desplazamientos a lo largo de toda la estructura y, en algunas ocasiones, también se les llama condiciones de geometría. Como un ejemplo, las ecuaciones de compatibilidad deben estar satisfechas en todos los puntos de apoyo, en donde es necesario que los desplazamientos de la estructura sean consistentes con las condiciones de apoyo. Por ejemplo, en un apoyo fijo no puede haber rotación del eje del elemento.

Las ecuaciones de compatibilidad también deben satisfacerse en todos los puntos, en el interior de la estructura. Usualmente, son las condiciones de compatibilidad en los nodos de la estructura las que son de interés. Por ejemplo, en una conexión rígida entre dos elementos, los desplazamientos (traslaciones y rotaciones), deben ser los mismos en los dos elementos.

2.6.- Principio de Superposición

El principio de superposición es uno de los conceptos más importantes en el análisis estructural. Puede utilizarse siempre que existan relaciones lineales entre las acciones y los desplazamientos; es decir, el material debe permanecer en el rango elástico lineal de la curva de esfuerzo – deformación ($\sigma-\epsilon$). Una consecuencia directa de esta hipótesis es la validez de este principio:

“La respuesta de una estructura, debido a un determinado número de acciones externas, se obtiene mediante la suma de las respuestas de las acciones individuales, aplicando, por separado, cada una ellas a la estructura”.

Para ilustrar el uso del principio de superposición, considérese la Fig. 2.5a. Esta viga está sujeta al momento M aplicado en el nodo A y la carga P aplicada en C. Sean R_A , R_B y M_B las reacciones que se generan en los apoyos y sea, además δ la deflexión de la viga en el punto D.

Los efectos de las acciones M y P actuando separadamente se muestran en las Figs. 2.5b y 2.5c, respectivamente. En cada caso existe un desplazamiento en el centro del claro de la viga y reacciones en los extremos.

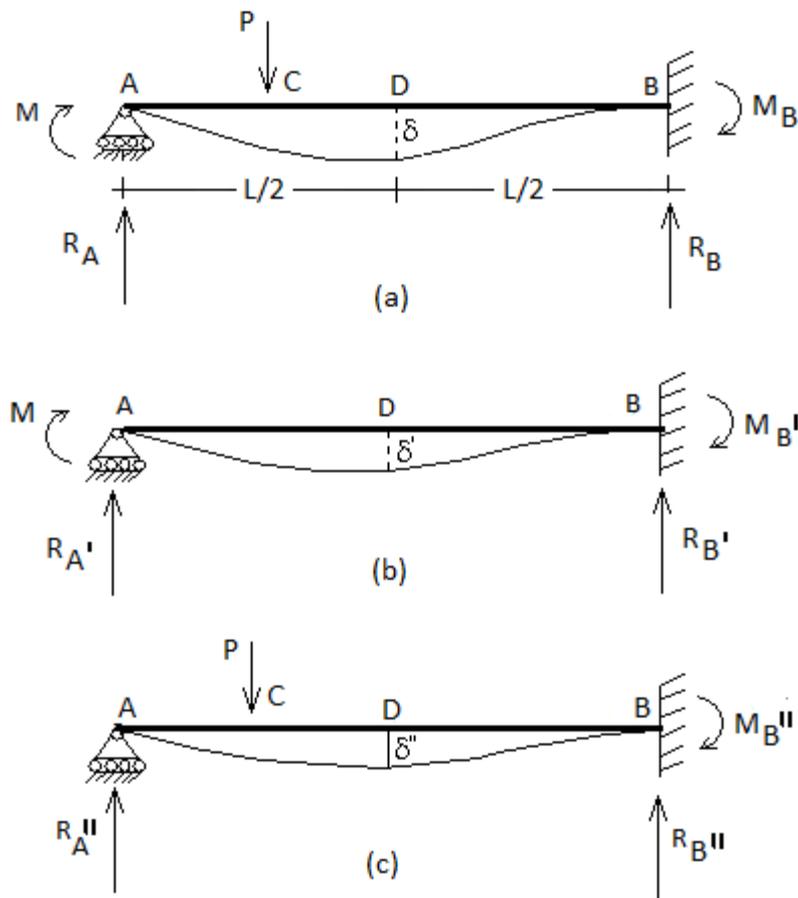


Fig. 2.5. Ilustración del principio de superposición

De acuerdo con el principio de superposición, las acciones y los desplazamientos causados por M y P actuando separadamente, pueden combinarse para obtener las acciones y los desplazamientos causados por M y P actuando simultáneamente (Fig. 2.5a). Por lo tanto, se pueden escribir las siguientes “ecuaciones de superposición”:

$$\begin{aligned}
 R_A &= R'_A + R''_A & R_B &= R'_B + R''_B \\
 M_B &= M'_B + M''_B & \delta &= \delta' + \delta''
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

Se pueden escribir ecuaciones de superposición similares para otras acciones y desplazamientos en la viga, tales como fuerzas resultantes en cualquier sección transversal de ella, y desplazamientos (traslaciones y rotaciones) en cualquier punto a lo largo del eje longitudinal de la misma.

Como ya se mencionó, el principio de superposición será válido donde quiera que existan relaciones lineales entre las acciones y los desplazamientos de la estructura. Esto ocurre siempre que se satisfacen los tres requisitos siguientes: (1) el material de la estructura sigue la ley de Hooke; (2) los desplazamientos de la estructura son pequeños; (3) no existe interacción entre los efectos debidos a la carga axial y el momento flector externos.

El primero de estos requisitos significa que el material es perfectamente elástico y que existe una relación lineal entre el esfuerzo y la deformación.

El segundo requisito significa que todos los cálculos que involucran las dimensiones de la estructura, pueden basarse en las dimensiones de los elementos que la conforman, en configuración indeformada de la misma.

El tercer requisito implica que el efecto de las fuerzas axiales en la flexión de los elementos, es despreciable. Este requisito se refiere al hecho de que las fuerzas axiales que actúan en un elemento, aún en combinación con pequeñas deflexiones del mismo, tienen un efecto en los momentos flectores. El efecto no es lineal y puede omitirse en el análisis cuando las fuerzas axiales (tensión o compresión) no son muy grandes.

Cuando se satisfacen los tres requisitos mencionados, se dice que la estructura es "linealmente elástica", y se puede utilizar el principio de superposición. Como este principio es fundamental en los métodos de flexibilidad y de rigidez, se supondrá, siempre, que las estructuras analizadas en este curso cumplen dichos requisitos.

III. INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE FLEXIBILIDAD Y RIGIDEZ

3.1.- Introducción

En este capítulo se introducirán los conceptos básicos de los métodos de flexibilidad y de rigidez. Estos métodos son aplicables, generalmente, a todo tipo de estructuras, incluyendo aquellos formados por vigas, columnas, placas, cáscaras y otros elementos estructurales.

La formulación de los dos métodos, se hace mediante el álgebra matricial ya que, de esta forma, se hace posible abordar dichos métodos en términos generales desde el principio, aunque los problemas que inicialmente se abordarán son muy sencillos y están seleccionados solamente para ilustrar los conceptos básicos.

La expresión de los métodos antes mencionados en términos matriciales, permite una generalización inmediata a estructuras complejas, siendo ésta una de las ventajas principales de la notación matricial. También, el uso de matrices, plantea el problema en una forma ideal para la programación de los referidos métodos.

3.2.- El Método de la flexibilidad

Para ilustrar las ideas fundamentales del método de la flexibilidad, considérese la viga mostrada en la Fig.3.1a. Esta viga es estáticamente indeterminada de primer grado, ya que hay tres reacciones posibles (dos reacciones en A y una en B), y dos ecuaciones de equilibrio estático disponibles. Por lo tanto se puede obtener una estructura libre, estáticamente determinada, liberando de la viga una acción redundante. En este caso hay dos opciones, las cuales se muestran en la Fig.3b y 3c. En la primera, la reacción redundante es el momento en el empotramiento A, y en la segunda, la redundante es la reacción en el apoyo B. Cualquiera de estas dos vigas es la "estructura libre" de la estructura original (Fig.4a).

Supóngase que se selecciona como redundante la reacción R_B . Luego la estructura libre es la viga mostrada en la Fig.3c.

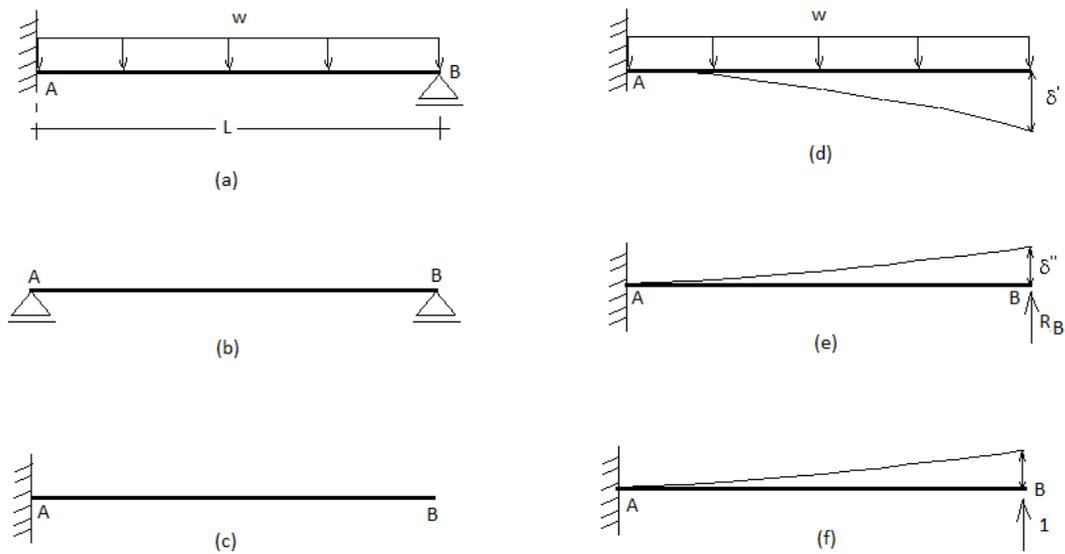


Fig. 3.1. Viga estáticamente indeterminada de primer grado

Bajo la acción de la carga uniforme w , la estructura libre se deforma tal como se ilustra en la Fig. 3.1d. El desplazamiento de la viga en el punto B de la misma se denota por δ' y viene dado por (caso 2 de la Tabla 1):

$$\delta' = -\frac{wL^4}{8EI} \quad (3.1)$$

donde EI es la rigidez a la flexión de la viga.

En la Fig. 3.1e se muestra la estructura libre sometida a la acción de la redundante R_B , la cual produce la deflexión δ'' , en el punto B de la misma y que viene dada (caso 1 de la Tabla 1) por:

$$\delta'' = \frac{R_B L^3}{3EI} \quad (3.2)$$

Sin embargo, la viga real no permite desplazamiento en el punto B, por lo tanto se debe verificar que:

$$\delta' + \delta'' = 0 \quad (3.3)$$

es decir;

$$\delta' + \delta'' = -\frac{wL^4}{8EI} + \frac{R_B L^3}{3EI} = 0$$

luego:

$$R_B = \frac{3}{8} w L \quad (3.4)$$

Una vez obtenida R_B , las demás reacciones pueden determinarse mediante las ecuaciones de equilibrio estático.

En este ejemplo, el procedimiento seguido consistió en el calcular desplazamientos en la estructura libre, y después establecer la ecuación relacionada con estos desplazamientos. La ec. (3.3) expresa el hecho de que el desplazamiento vertical, hacia abajo de la viga, en el punto B, debido a la carga w , es igual al desplazamiento hacia arriba, en el mismo punto, debido a la redundante.

En general, una ecuación de este tipo puede ser vista como una “ecuación de compatibilidad”, debido a que expresa una condición relacionada con los desplazamientos de la estructura. También puede llamarse “ecuación de superposición”, ya que está basada en la superposición de los desplazamientos causados por más de una acción.

Un procedimiento más general que puede utilizarse en la solución de la viga de la Fig. 3.1, consiste en determinar el desplazamiento producido por un valor unitario de R_B , y luego multiplicar este desplazamiento por R_B . Luego, la aplicación de una fuerza unitaria (correspondiente a la redundante seleccionada), a la estructura libre, tal como se muestra en la Fig. 3.1f, da como resultado un desplazamiento positivo δ_B , el cual viene dado por:

$$\delta_B = \frac{L^3}{3EI} \quad (3.5)$$

El desplazamiento causado por R_B actuando sola sobre la estructura libre es $\delta_B \cdot R_B$ y el desplazamiento causado por la carga uniforme w actuando sola sobre la estructura libre es:

$$\Delta_B = -\frac{wL^4}{8EI} \quad (3.6)$$

La superposición de los desplazamientos debidos a la carga w y a la reacción R_B , debe producir un desplazamiento igual a cero en el punto B de la viga. Por lo tanto, la ecuación de compatibilidad es:

$$\Delta_B + \delta_B R_B = 0 \quad (3.7)$$

es decir:

$$R_B = -\frac{\Delta_B}{\delta_B} \quad (3.8)$$

Cuando las expresiones dadas anteriormente para δ_B y Δ_B [es decir, las ecs. (3.5) y (3.6)], se sustituyen en la ec. (3.8), el resultado es:

$$R_B = \frac{5}{8} wL \quad (3.9)$$

que, por supuesto, es el mismo resultado obtenido anteriormente. El signo positivo en el resultado denota, el hecho que R_B está dirigido hacia arriba.

Una parte importante de la solución precedente consiste en escribir la ecuación de superposición [ec. (3.7)] que expresa el hecho geométrico de que la viga no sufre deflexión en el apoyo B. En esta ecuación están incluidos los efectos de la carga y de la reacción redundante. El desplazamiento causado por la reacción, se expresó como el producto de la reacción y el desplazamiento causado por un valor unitario de la misma. Este último término es un "coeficiente de flexibilidad", ya que es el desplazamiento debido a una acción unitaria.

Si una estructura es estáticamente indeterminada de un grado mayor al primero, el procedimiento descrito debe organizarse un poco más, y se debe introducir una notación más generalizada. Para ilustrar estas características considérese la viga mostrada en la Fig. 3.2a.

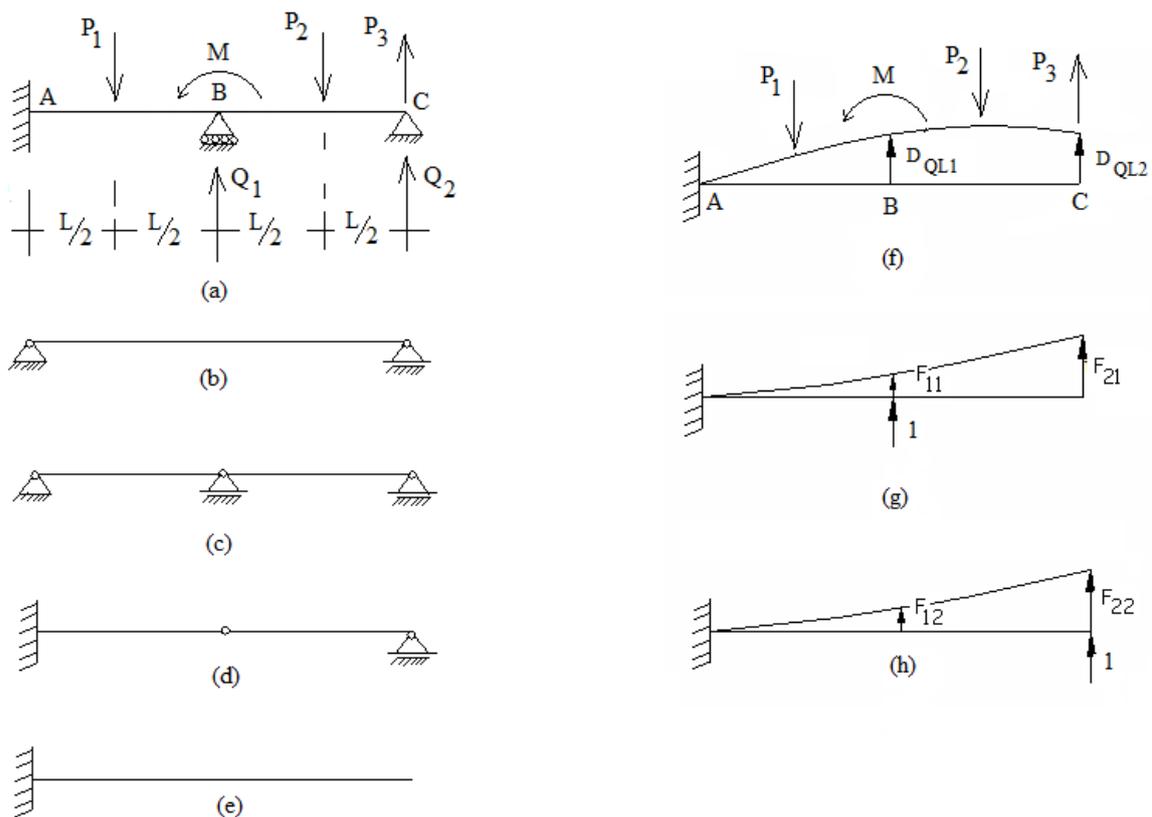


Fig. 3.2. Ilustración del método de la flexibilidad

Esta viga es estáticamente indeterminada de segundo grado. Por lo tanto se puede obtener una estructura libre, estáticamente determinada, liberando de la viga dos acciones redundantes. Se pueden seleccionar diferentes acciones para las redundantes y la estructura libre correspondiente. En las Figs.3.2b,

3.2c, 3.2d y 3.2e se muestran cuatro de estas posibilidades para la estructura libre.

En la Fig. 3.2b se seleccionaron como redundantes el momento reactivo en A y reacción en B. Luego, la restricción rotacional en A y la restricción vertical en B se eliminan de la viga original para obtener la estructura libre.

En la Fig. 3.2c se liberan el momento reactivo en A y el momento flector interno en B. Por lo tanto, la estructura libre no tiene restricción rotacional en A, ni restricción contra el momento flector en B. Esta última condición se representa por la presencia de una articulación en la viga en el punto B.

La estructura libre mostrada en la Fig.3.2d se obtiene liberando la reacción y el momento flector en el punto B.

Finalmente, la estructura libre mostrada en la Fig.3.2e se obtiene seleccionando las reacciones en los nodos B y C como las redundantes.

Para el análisis de este problema se seleccionó la estructura libre mostrada en la Fig.3.2e. Las acciones redundantes seleccionadas son las fuerzas en los nodos B y C, denotadas por Q_1 y Q_2 en la Fig.3.2a.

En la Fig.3.2f se muestra la estructura libre sujeta a las cargas que actúan sobre la viga original; las tres fuerzas concentradas P_1, P_2 y P_3 , y el momento flector M . Estas cargas producen desplazamientos en la estructura libre. En particular, en dicha figura se denotan por DQL1 y DQL2 los desplazamientos de los puntos B y C, asociados a las redundantes seleccionadas Q_1 y Q_2 , respectivamente.

En esta notación D_{QL} se utiliza para representar un desplazamiento correspondiente a una redundante Q y causado por las cargas que actúan en la estructura. Los subíndices numéricos que siguen a este símbolo denotan la redundante a la que corresponde el desplazamiento. En la Fig.3.2f, los desplazamientos DQL se muestran en sentido positivo.

Nota: Los sentidos positivos para los desplazamientos deben ser siempre los mismos que los sentidos positivos de las redundantes a las que corresponden los desplazamientos.

Para obtener los diferentes coeficientes de flexibilidad que aparecen en las ecuaciones de compatibilidad, se aplican valores unitarios de las redundantes Q_1 y Q_2 , por separado, a la estructura libre. Para la condición $Q_1=1$, mostrada en la Fig.3.2g, el coeficiente de flexibilidad F_{11} es el desplazamiento correspondiente a Q_1 debido a un valor unitario de Q_1 , y el coeficiente de

flexibilidad F_{21} es el desplazamiento correspondiente a Q_2 , debido a un valor unitario de Q_1 .

Para la condición $Q_2=1$, mostrada en la Fig.3.2h, F_{12} es el desplazamiento correspondiente a Q_1 debido a un valor unitario de Q_2 y F_{22} es el desplazamiento correspondiente a Q_2 debido a un valor unitario de Q_2 . Los coeficientes de flexibilidad se muestran en sus sentidos positivos.

Las ecuaciones de superposición que expresan las condiciones de compatibilidad en los nodos B y C, de la viga real, pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} D_{QL1} + F_{11}Q_1 + F_{12}Q_2 &= 0 \\ D_{QL2} + F_{21}Q_1 + F_{22}Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

La primera de estas ecuaciones representa el desplazamiento total en B, el cual está formado por tres componentes: el desplazamiento debido a las cargas, el desplazamiento debido a Q_1 , y el desplazamiento debido a Q_2 . La superposición de los tres desplazamientos da el desplazamiento total que, en este caso, es igual a cero. Igual razonamiento se aplica a la segunda ecuación.

Estas dos ecuaciones pueden resolverse para Q_1 y Q_2 . Una vez determinadas estas fuerzas, se pueden determinar, mediante las ecuaciones de equilibrio estático, las otras reacciones de la viga.

Las ecuaciones (3.10) se pueden escribir de una forma más general. Nótese que siempre es posible que los movimientos en los apoyos correspondientes a las redundantes tengan lugar en la viga original. Si ese es el caso, estos desplazamientos pueden incluirse, rápidamente, en el análisis.

Supóngase que D_{Q1} y D_{Q2} representan los desplazamientos actuales en la viga correspondientes a Q_1 y Q_2 . Por lo tanto D_{Q1} representa el desplazamiento del apoyo en B. De igual modo D_{Q2} , representa el desplazamiento del apoyo en C. Luego, las ecuaciones. (3.6), en forma general, se escriben:

$$\begin{aligned} D_{Q1} &= D_{QL1} + F_{11}Q_1 + F_{12}Q_2 \\ D_{Q2} &= D_{QL2} + F_{21}Q_1 + F_{22}Q_2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Si no existen desplazamientos en los apoyos, como se supuso en este ejemplo, $D_{Q1}=D_{Q2}=0$, y las ecuaciones. (3.11), se reducen a las ecuaciones. (3.10).

Las ecuaciones de superposición se pueden escribir en forma matricial, como:

$$\{D_Q\} = \{D_{QL}\} + [F]\{Q\} \quad (3.12)$$

donde, $\{D_Q\}$ es el vector de los desplazamientos actuales correspondientes a las redundantes; $\{D_{QL}\}$ es el vector de desplazamientos de la estructura libre correspondientes a las acciones redundantes Q y debido a las cargas; $[F]$ es la matriz de flexibilidad para la estructura libre, correspondiente a las acciones redundantes Q . Para la ecuación anterior estos vectores y la matriz vienen dados por:

$$\{D_Q\} = \begin{Bmatrix} D_{Q1} \\ D_{Q2} \end{Bmatrix}; \quad \{D_{QL}\} = \begin{Bmatrix} D_{QL1} \\ D_{QL2} \end{Bmatrix}; \quad [F] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

El vector $\{Q\}$ de las acciones redundantes se obtiene resolviendo la ec. (3.12); es decir:

$$\{Q\} = [F]^{-1} (\{D_Q\} - \{D_{QL}\}) \quad (3.13)$$

donde $[F]^{-1}$ es la inversa de la matriz de flexibilidad.

Para que el vector de las acciones redundantes pueda ser calculado, en primer lugar se deberán determinar los coeficientes de los vectores $\{D_Q\}$, $\{D_{QL}\}$ y la matriz $[F]$. Los coeficientes de primero de estos vectores se obtienen a partir de las condiciones de los apoyos que existan en la estructura original, mientras que los coeficientes del otro vector y de la matriz se calculan a partir de las condiciones de la estructura libre.

El problema puede considerarse resuelto cuando el vector $\{Q\}$ queda determinado, ya que todas las otras acciones se calculan mediante las condiciones de equilibrio estático. Cuando se han determinado las acciones de toda la estructura, pueden, entonces, determinarse los desplazamientos en cualquier nodo de la misma.

Generalmente, el vector $\{D_Q\}$ será nulo, excepto cuando una o más de las redundantes es una reacción del apoyo que tiene un desplazamiento de apoyo especificado. Si el vector $\{D_Q\}$ es nulo, la ec. (3.13), queda igual a:

$$\{Q\} = -[F]^{-1}\{D_{QL}\} \quad (3.14)$$

Para ilustrar el uso de las ecuaciones matriciales anteriores, considérese de nuevo la Fig.3.2a. Para tener un ejemplo específico, supóngase que la viga

tiene una rigidez a la flexión constante igual a EI , y que las acciones externas son:

$$P_1 = 2P; M = PL; P_2 = P; P_3 = P$$

y se asume que en ningún apoyo de la estructura existen desplazamientos de soporte.

En primer lugar, entonces, como ya se estableció, se deberán determinar los coeficientes de los vectores $\{D_Q\}$, $\{D_{QL}\}$ y la matriz $[F]$, ya que en la viga original no hay desplazamientos de apoyo correspondientes a Q_1 y Q_2 , el vector $\{D_Q\}$ es igual al vector nulo.

El vector $\{D_{QL}\}$ representa los desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y causados por las cargas externas. Estos desplazamientos pueden determinarse considerando la Fig.3.2f, la cual muestra la estructura libre bajo la acción de las cargas externas. Estos desplazamientos en la viga, correspondientes a Q_1 y Q_2 , pueden determinarse mediante la Tabla 1 del anexo.

En la Fig.3.3 se muestra la viga libre sometida al conjunto de cargas especificado en el problema, el cual puede ser considerado como la superposición de cada una de las acciones externas, tal como se muestra en las Figs.3.3a, 3.3b, 3.3c y 3.3d.

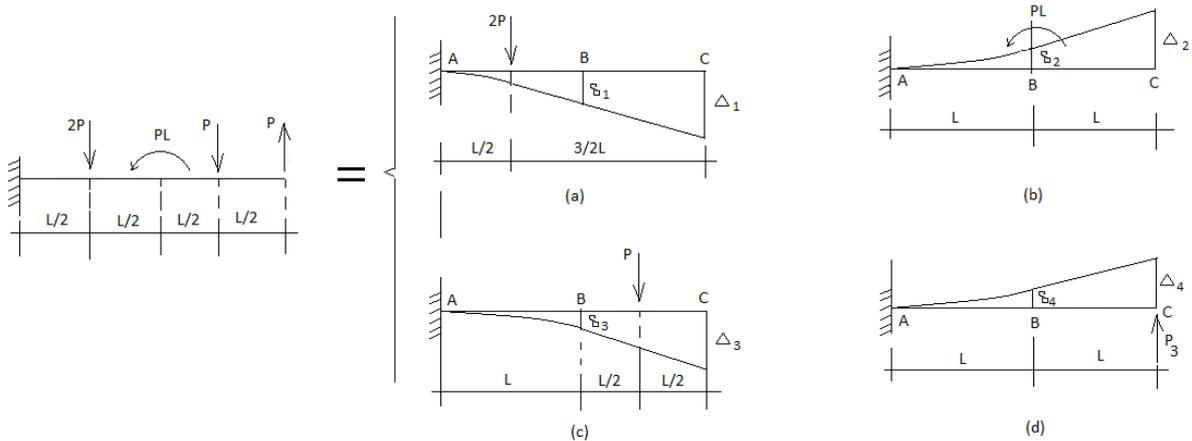


Fig.3.3. Principio de superposición para la viga cargada

De este modo la componente D_{QL1} del vector $\{D_{QL}\}$, vendrá dada por:

$$D_{QL1} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4$$

Utilizando la Tabla 1, es fácil verificar que:

$$\delta_1 = -\frac{2P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{2P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EL} \left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{5PL^3}{24EI}$$

$$\delta_2 = \frac{PL^3}{2EI}$$

De la ecuación de la curva elástica general para una viga empotrada en un extremo y libre en el otro:

$$y(x) = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$

la cual, aplicada al caso de la Fig3.3c, permite obtener:

$$\delta_3 = y(L) = \frac{P}{6EI} \left[L^3 - 3\left(\frac{3L}{2}\right)L \right] = -\frac{7PL^3}{12EI}$$

y, finalmente, del mismo modo anterior:

$$\delta_4 = y(L) = \frac{P}{6EI} \left[-L^3 + 3(2L)L^2 \right] = \frac{5PL^3}{6EI}$$

Luego,

$$D_{QL1} = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 = \frac{13PL^3}{24EI}$$

Procediendo de igual modo, se obtiene la componente D_{QL2} del vector $\{D_{QL}\}$, la cual viene dada, ahora, por:

$$D_{QL2} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$$

$$\Delta_1 = -\frac{2P\left(\frac{L}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{2P\left(\frac{L}{2}\right)^2}{2EL} \left(\frac{3L}{2}\right) = -\frac{22PL^3}{48EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{PL^3}{2EI} + \frac{PL^2}{EI} (L) = \frac{3PL^3}{2EI}$$

$$\Delta_3 = -\frac{P\left(\frac{3L}{2}\right)^3}{3EI} - \frac{P\left(\frac{3L}{2}\right)^2}{2EL} \left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{81PL^3}{48EI}$$

$$\Delta_4 = \frac{P(2L)^3}{3EI}$$

Luego

$$D_{QL2} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = \frac{97PL^3}{48EI}$$

Los signos positivos de estos resultados indican que ambos desplazamientos son hacia arriba. Vectorialmente se escribe entonces:

$$\{D_{QL}\} = \frac{PL^3}{48EI} \begin{Bmatrix} 26 \\ 97 \end{Bmatrix}$$

Los coeficientes de la matriz de flexibilidad se obtienen a partir de las Fig.3.2g y Fig.3.2h, las cuales se muestran de nuevo a continuación:

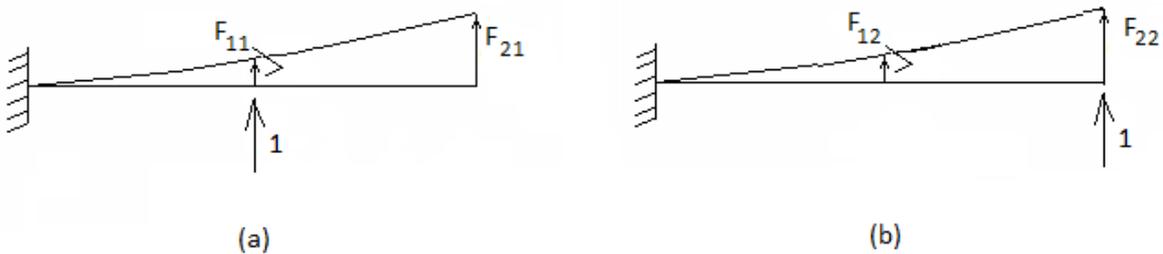


Fig.3.4 Coeficientes de la matriz de flexibilidad

Siguiendo un procedimiento análogo al cálculo de los coeficientes del vector $\{D_{QL}\}$, es fácil verificar que:

$$F_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$

$$F_{21} = \frac{L^3}{3EI} + \frac{L^2}{2EI}(L) = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$F_{12} = \frac{1}{6EI} [-L^3 + 3(2L)L^2] = \frac{5L^3}{6EI}$$

$$F_{22} = \frac{(2L)^3}{3EI} = \frac{8L^3}{3EI}$$

De modo que la matriz de flexibilidad $[F]$, se escribe entonces:

$$[F] = \frac{L^3}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}$$

La inversa de la matriz de flexibilidad es:

$$[F]^{-1} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

Nótese que tanto la matriz de flexibilidad como su inversa son simétricas.

El paso final en el análisis, ec. (3.13), se usa ahora para obtener las acciones redundantes; es decir el vector $\{Q\}$:

$$\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \frac{6EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \frac{PL^3}{48EI} \begin{Bmatrix} 26 \\ 97 \end{Bmatrix} = \frac{P}{56} \begin{Bmatrix} 69 \\ -64 \end{Bmatrix}$$

Por lo tanto, las reacciones en los apoyos B y C, de la viga de la Fig.3.2a, son:

$$Q_1 = \frac{69P}{56} \qquad \qquad \qquad y \qquad \qquad \qquad Q_2 = -\frac{8P}{7}$$

El signo negativo de Q_2 indica que esta reacción es hacia abajo. Una vez obtenidas las redundantes se utilizan las ecuaciones de equilibrio estático para determinar las demás reacciones de la viga.

A pesar que el método de flexibilidad se presentó para el problema de una viga de dos claros, el procedimiento es completamente general y puede aplicarse a cualquier estructura estáticamente indeterminada, independientemente de su grado de indeterminación estática. Por supuesto que entonces el orden de las matrices y vectores será distinto al ejemplo presentado. En general, si hay n grados de indeterminación estática, el orden de la matriz de flexibilidad $[F]$ será de $n \times n$, y todos los vectores serán de orden $n \times 1$.

Para completar el análisis de la estructura mediante el método de flexibilidad se deben determinar los desplazamientos nodales, las acciones de extremo de miembro y las reacciones. Siempre será posible calcular estas variables utilizando los principios de equilibrio estático a partir del cálculo de las redundantes. En vez de seguir este procedimiento, es preferible realizar estos cálculos en paralelo con los que se hacen para calcular las redundantes de la estructura.

Para mostrar este procedimiento sea, de nuevo, la viga de dos claros que se ha venido analizando. Dicha viga se muestra, de nuevo, en la Fig.3.5a. Una vez calculadas las redundantes se desea hacer, ahora, el cálculo de los desplazamientos nodales así como también las acciones de extremo de miembro y las reacciones en los apoyos.

Los desplazamientos nodales de la estructura se denotarán por el símbolo general D_j , y se usarán suscritos numéricos para identificar un desplazamiento nodal específico. Por ejemplo, en la viga de la Fig.3.5a, los dos desplazamientos nodales a determinar son las rotaciones de los nodos B y C. Estos desplazamientos se denotarán por D_{j1} y D_{j2} , respectivamente, y se asumen positivos cuando giran en sentido anti-horario, tal como se muestra en dicha figura.

Las acciones de extremo de miembro son los momentos y las fuerzas que actúan en los extremos de los elementos, cuando se los considera aislados del resto de la estructura. Para la viga en consideración, las acciones de extremo de miembro son los momentos flectores y fuerzas de corte en los extremos de los elementos, tal como se muestra en la Fig.3.5b. En la Fig.3.5b se muestran los sentidos positivos de dichas acciones la cual está basada en la convención de signos usada comúnmente en la estática; es decir, sentido positivo cuando la fuerza actúa hacia arriba, y momento flector positivo cuando gira en sentido anti-horario.

En general, se adopta el símbolo A_M para las acciones de extremo de miembro y se distinguen uno de otro mediante suscritos numéricos. En el ejemplo de la Fig.3.5 hay ocho acciones de extremo de miembro, la cuales se muestran en la Fig.3.5b.

Nótese que en este ejemplo particular las sumas de las fuerzas cortantes A_{M3} y A_{M5} debe ser igual a la acción redundante Q_1 ya que no hay carga vertical sobre la viga en el nodo B. También, la suma de los momentos flectores A_{M4} y A_{M6} , debe ser igual al momento flector M que actúa sobre la viga en el nodo B.

Finalmente, considérense las reacciones en los apoyos de la viga mostrados en la fig.3.5a. Las dos reacciones en los apoyos B y C se calculan directamente ya que ellas son las propias redundantes Q_1 y Q_2 . Las reacciones restantes, denotadas generalmente por el símbolo A_R , consisten en una fuerza vertical y un momento en el apoyo A. Estas reacciones están rotuladas, en la Fig.3.5a, por A_{R1} y A_{R2} y se asume que son positivas en las direcciones mostradas.

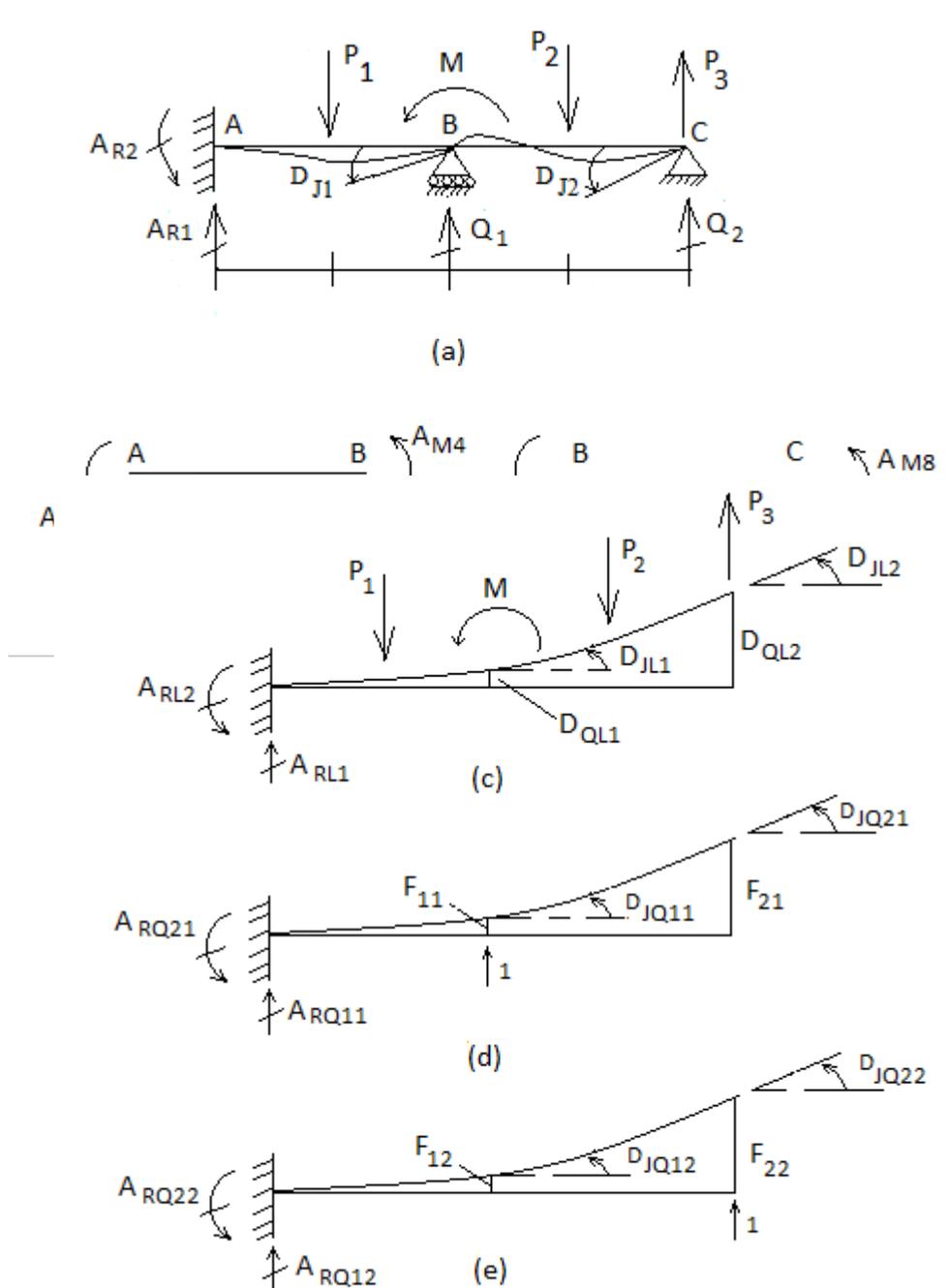


Fig.3.5. Desplazamientos nodales, acciones de extremo de miembro y reacciones en los apoyos

El principio de superposición permite determinar los desplazamientos D_J , las acciones de extremo de miembro A_M y las reacciones A_R de la viga de la Fig.3.5a. Este principio ya fue aplicado para poder presentar las estructuras mostradas en las Figs. 5.3c, 5.3d y 5.3e para poder obtener una ecuación para la redundante Q [ver ec.(3.12)]. De forma similar, el principio de superposición puede usarse para obtener los desplazamientos nodales D_J en la viga de la Fig.3.5a. Para hacerlo, es necesario evaluar los desplazamientos en la

estructura libre (Figs.3.5c, 3.5d y 3.5e). En la estructura libre sujeta a las cargas, estos desplazamientos están denotados por el símbolo general D_{JL} y, en particular, las rotaciones de los nodos B y C se rotularon D_{JL1} y D_{JL2} , las cuales se muestran en la Fig.3.5c.

Ahora se considerará la estructura libre sujeta a los valores unitarios de las redundantes, tal como se muestra en las Figs.3.5d y 3.5e. Los desplazamientos correspondientes a D_J se denotan por D_{JQ} , en donde la letra Q se usa para indicar que los desplazamientos nodales son causados por el valor unitario de las redundantes. Considérese, por ejemplo, la estructura libre sujeta al valor unitario de la redundante Q_1 (Fig.3.5d). Los desplazamientos nodales causados por esta carga se denotan por D_{JQ11} y D_{JQ21} , en donde el primer suscrito numérico identifica el desplazamiento particular que ha sido considerado, y el segundo suscrito denota la redundante que ha causado el desplazamiento. En la Fig.3.5e se muestran desplazamientos nodales D_{JQ21} y D_{JQ22} causados por el valor unitario de Q_2 .

A continuación se usará el principio de superposición para obtener los desplazamientos D_J de la viga en estudio. Superponiendo los desplazamientos de las vigas de las Figs.3.5c, 3.5d y 3.5e, se obtienen los desplazamientos de la viga de la Fig.3.5; es decir:

$$\begin{aligned} D_{J1} &= D_{JL1} + D_{JQ11} Q_1 + D_{JQ12} Q_2 \\ D_{J2} &= D_{JL2} + D_{JQ21} Q_1 + D_{JQ22} Q_2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Estas ecuaciones se pueden expresar en forma matricial de la siguiente manera:

$$\{D_J\} = \{D_{JL}\} + [D_{JQ}]\{Q\} \quad (3.16)$$

dónde:

$$\{D_J\} = \begin{Bmatrix} D_{J1} \\ D_{J2} \end{Bmatrix} \quad \{D_{JL}\} = \begin{Bmatrix} D_{JL1} \\ D_{JL2} \end{Bmatrix} \quad [D_{JQ}] = \begin{bmatrix} D_{JQ11} & D_{JQ12} \\ D_{JQ21} & D_{JQ22} \end{bmatrix} \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$$

Por supuesto que en un caso más general, estos vectores y la matriz tienen un orden mayor que el del presente ejemplo. Si hay j desplazamientos nodales a calcular, el orden de los vectores $\{D_J\}$ y $\{D_{JL}\}$ será de $j \times 1$. Si el número de redundantes es q , entonces el vector $\{Q\}$ será del orden $n \times 1$ y por lo tanto la matriz $[D_{JQ}]$ será del orden $j \times q$. Una vez obtenidos la matriz y vectores anteriores, entonces se utiliza la ec.(3.16) para determinar, mediante operaciones matriciales los desplazamientos D_J .

De modo análogo al utilizado para obtener la ec.(3.16), se hace uso del principio de superposición para deducir las acciones de extremo de miembro A_M y las reacciones A_R . En este caso, las ecuaciones de superposición son:

$$\begin{aligned} \{A_M\} &= \{A_{ML}\} + [A_{MQ}]\{Q\} \\ \{A_R\} &= \{A_{RL}\} + [A_{RQ}]\{Q\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

En donde $\{A_M\}$ y $\{A_R\}$ son los vectores de las acciones de extremo de miembro y las reacciones en la viga original (Fig.3.5a); $\{A_{ML}\}$ y $\{A_{RL}\}$ son los vectores de acciones de extremo de miembro y de reacciones en la estructura libre debido a las cargas y $[A_{MQ}]$ y $[A_{RQ}]$ son las matrices de las acciones de extremo de miembro y las reacciones debido a los valores unitarios de las redundantes.

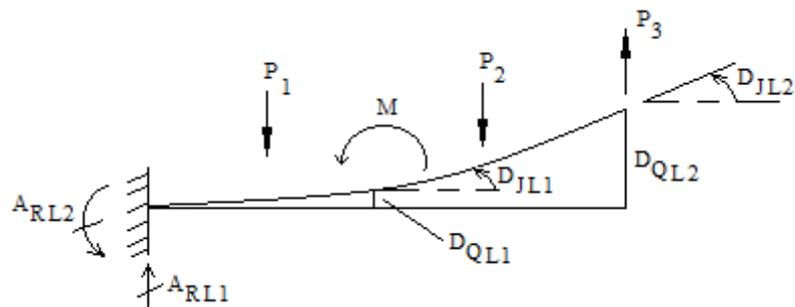
En este ejemplo, los vectores $\{A_M\}$ y $\{A_{ML}\}$ son del orden 8×1 ; los vectores $\{A_R\}$ y $\{A_{RL}\}$ son del orden 2×1 ya que hay sólo dos reacciones a considerar y las matrices $[A_{MQ}]$ y $[A_{RQ}]$ son del orden 8×2 y 2×2 , respectivamente.

En el caso general en que existan m acciones de extremo de miembro, r reacciones y q redundantes, los vectores $\{A_M\}$ y $\{A_{ML}\}$ serán del orden $m \times 1$, $[A_{MQ}]$ será del orden $m \times q$, $\{A_R\}$ y $\{A_{RL}\}$ serán del orden de $r \times 1$ y $[A_{RQ}]$ será del orden $r \times q$.

De la discusión anterior se puede notar que los pasos a seguir en el análisis de una estructura mediante el método de la flexibilidad incluye principalmente un extensivo análisis de la estructura libre. Con las cargas sobre la estructura libre, es necesario determinar las acciones y los desplazamientos que forman los vectores $\{D_{QL}\}$, $\{D_{JL}\}$, $\{A_{ML}\}$ y $\{A_{RL}\}$. Con los valores unitarios de las redundantes actuando sobre la estructura libre es necesario determinar las matrices $[F]$, $[D_{JQ}]$, $[A_{MQ}]$, y $[A_{RQ}]$. Entonces se resuelve en primer lugar la ec.(3.12) para determinar el vector $\{Q\}$ de las redundantes. Luego mediante las ecs.(3.16)-(3.17), se evalúan los vectores $\{D_J\}$, $\{A_M\}$ y $\{A_R\}$. De este modo quedan calculados todas las acciones y desplazamientos de interés en la estructura original.

A continuación se seguirá el esquema descrito para determinar los desplazamientos nodales, las acciones de extremo de miembro y las reacciones del ejemplo de la viga de dos claros que se ha venido analizando.

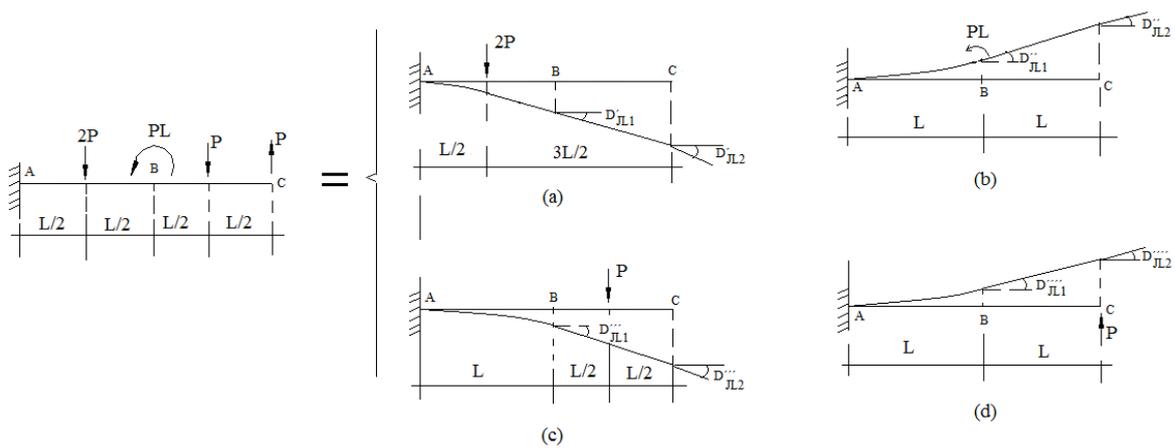
La estructura libre de la Fig:3.5c y las cargas que sobre ella actúan se muestra de nuevo en la siguiente figura.



(A) CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NODALES:

(A1) Cálculo de los desplazamientos nodales en la estructura libre debido a las cargas en la estructura original.

Cuando estas cargas actúan sobre la estructura libre, los desplazamientos nodales D_{JL1} y D_{JL2} , se calculan, a partir de la siguiente figura, del siguiente modo:



Cálculo de D_{JL1} :

De la Fig(a), (Caso 1 de la Tabla 1, con $L=L/2$):

$$D'_{JL1} = -\frac{2P(L/2)^2}{2EI} = -\frac{PL^2}{4EI}$$

De la Fig(b), (Caso 4 de la Tabla 1, con $L=L$):

$$D''_{JL1} = \frac{(PL)L}{EI} = \frac{PL^2}{EI}$$

De la Fig(c) (Caso 1 de la Tabla 1, con $L=3L/2$):

Para este caso, la curva elástica para este caso es:

$$y(x) = \frac{P}{6EI} (x^3 - 3Lx^2)$$

de modo que:

$$y'(x) = \frac{P}{6EI} (3x^2 - 6Lx), \text{ haciendo } L = 3L/2 \text{ y evaluando } y'(x) \text{ en } x = L, \text{ se}$$

obtiene:

$$y'(L) = D'_{JL1} = -\frac{PL^2}{EI}$$

De la Fig(d) (Caso 1 de la Tabla 1, con $L=2L$):

Es un caso similar al anterior pero con los signos cambiados; es decir:

$$y(x) = \frac{P}{6EI} (-x^3 + 3Lx^2)$$

y por lo tanto:

$$y'(x) = \frac{P}{6EI} (-3x^2 + 6Lx), \text{ haciendo } L = 2L \text{ y evaluando } y'(x) \text{ en } x = L, \text{ se}$$

obtiene:

$$y'(L) = D'_{JL1} = \frac{3PL^2}{2EI}$$

Luego:

$$D_{JL1} = D'_{JL1} + D''_{JL1} + D'''_{JL1} + D''''_{JL1} = -\frac{PL^2}{4EI} + \frac{PL^2}{EI} - \frac{PL^2}{EI} + \frac{3PL^2}{2EI} = \frac{5PL^2}{4EI}$$

Cálculo de D_{JL2}

Es fácil notar que los valores de D_{JL2} para los casos (a) y (b) son los mismos de D_{JL1} . Luego:

$$D'_{JL2} = -\frac{PL^2}{4EI} \quad y$$

$$D''_{JL2} = \frac{PL^2}{EI}$$

De la Fig(c) (Caso 1 de la Tabla 1, con $L=3L/2$):

$$D''_{JL2} = -\frac{P(3L/2)^2}{2EI} = -\frac{9PL^2}{8EI}$$

De la Fig(d) (Caso 1 de la Tabla 1, con $L=2L$):

$$D'''_{JL2} = \frac{P(2L)^2}{2EI} = \frac{2PL^2}{EI}$$

Por lo tanto:

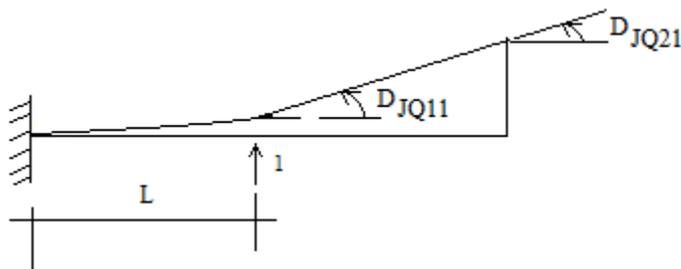
$$D_{JL2} = D'_{JL2} + D''_{JL2} + D'''_{JL2} + D''''_{JL2} = -\frac{PL^2}{4EI} + \frac{PL^2}{EI} - \frac{9PL^2}{8EI} + \frac{2PL^2}{EI} = \frac{13PL^2}{8EI}$$

Luego, el vector $\{D_{JL}\}$ viene dado por:

$$\{D_{JL}\} = \frac{PL^2}{8EI} \begin{Bmatrix} 10 \\ 13 \end{Bmatrix}$$

(A2) Cálculo de los desplazamientos nodales en la estructura libre debido a los valores unitarios de las redundantes:

En la siguiente figura se muestran los desplazamientos nodales en la estructura libre y debido a los valores unitarios de la redundante Q_1 .

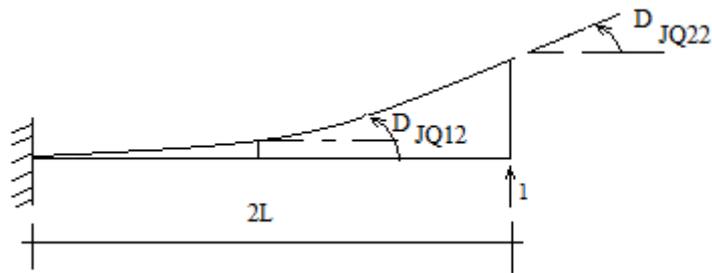


De nuevo, utilizando la Tabla1, se deduce que:

$$D_{JQ11} = \frac{L^2}{2EI}$$

$$D_{JQ21} = \frac{L^2}{2EI}$$

En la siguiente figura se muestran los desplazamientos nodales en la estructura libre y debido a los valores unitarios de la redundante Q_2 .



y, de acuerdo con la Tabla 1:

$$D_{JQ22} = \frac{(2L)^2}{2EI} = \frac{2L^2}{EI}$$

El valor de D_{JQ12} se obtiene a partir de:

$$y(x) = \frac{P}{6EI} (-x^3 + 3(2L)x^2)$$

Luego:

$$y'(x) = \frac{P}{6EI} (-3x^2 + 12Lx)$$

$$D_{JQ12} = y'(L) = \frac{P}{6EI} (-3L^2 + 12L^2) \quad \Rightarrow$$

$$D_{JQ12} = \frac{3L^2}{2EI}$$

Luego, la matriz $[D_{JQ}]$ viene dada por:

$$[D_{JQ}] = \frac{L^2}{2EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego, de acuerdo con la ec.(3.16)

$$\{D_J\} = \{D_{JL}\} + [D_{JQ}]\{Q\}$$

$$\begin{Bmatrix} D_{J1} \\ D_{J2} \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{8EI} \begin{Bmatrix} 10 \\ 13 \end{Bmatrix} + \frac{L^2}{2EI} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{69P}{56} \\ -\frac{64P}{56} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_{J1} \\ D_{J2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{17PL^2}{112EI} \\ -\frac{5PL^2}{112EI} \end{Bmatrix}$$

(B) CÁLCULO DE LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO:

(B1) Cálculo de las acciones de extremo de miembro en la estructura libre debido a las cargas en la estructura original.

En la siguiente figura se muestra la estructura libre sometida a las cargas que actúan en la viga original:

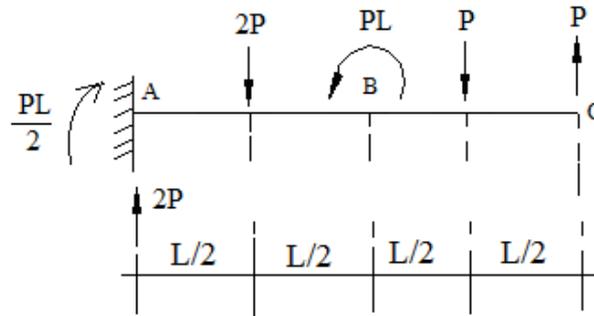


Figura (a)

En la siguiente figura se muestra el elemento AB (Elemento 1) en equilibrio estático:

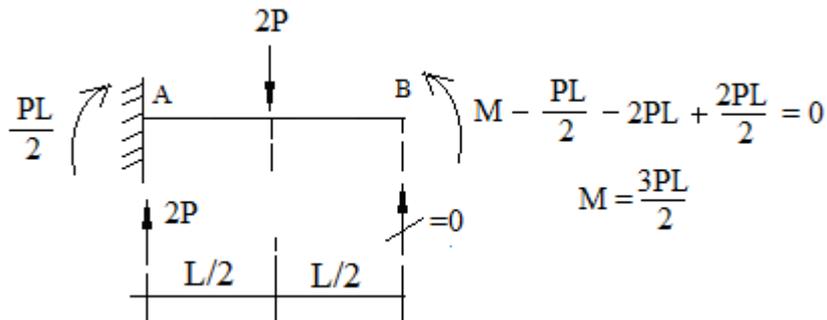


Figura (b)

En la siguiente figura se muestran los sentidos positivos de las acciones de extremo de miembro para un elemento (e):

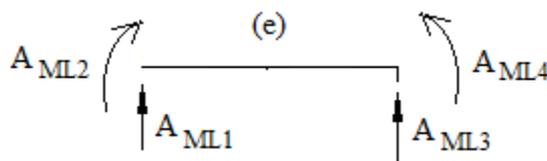
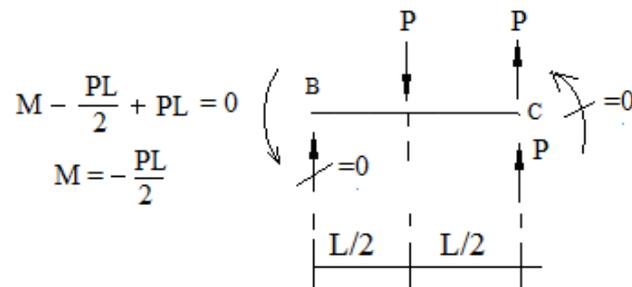


Figura (c)

De acuerdo con este criterio, el vector $\{A_{ML}\}$ para el elemento 1 es entonces:

$$\begin{Bmatrix} A_{ML1} \\ A_{ML2} \\ A_{ML3} \\ A_{ML4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2P}{PL} \\ -\frac{P}{2} \\ 0 \\ \frac{3PL}{2} \end{Bmatrix}$$

En la siguiente figura se muestra el elemento BC (Elemento 2) en equilibrio estático:



El vector $\{A_{ML}\}$ para este elemento es entonces:

$$\begin{Bmatrix} A_{ML1} \\ A_{ML2} \\ A_{ML3} \\ A_{ML4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ PL \\ -\frac{P}{2} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(B2) Cálculo de las acciones de extremo de miembro en la estructura libre debido a los valores unitarios de las redundantes:

En la siguiente figura se muestra la estructura libre en equilibrio estático cuando está sometida al valor unitario de la redundante Q_1 .

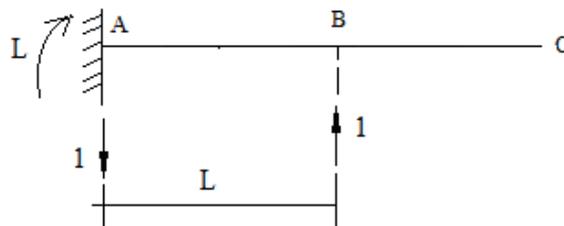


Figura (d)

Las acciones de extremo de miembro para los dos elementos se muestran en la siguiente figura.

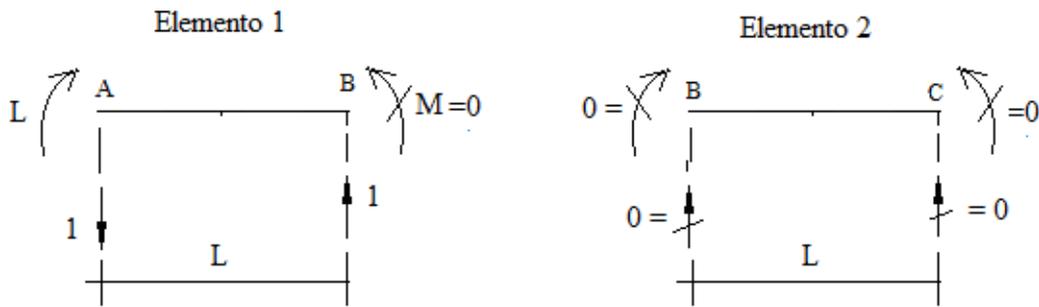


Figura (e)

En la siguiente figura se muestra la estructura libre en equilibrio estático cuando está sometida al valor unitario de la redundante Q_2 .

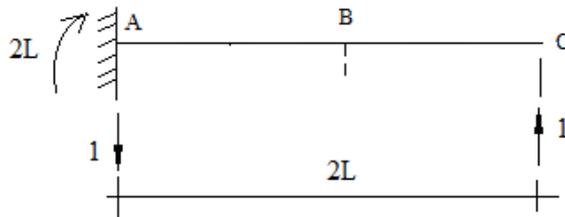


Figura (f)

Las acciones de extremo de miembro para los dos elementos se muestran en la siguiente figura.

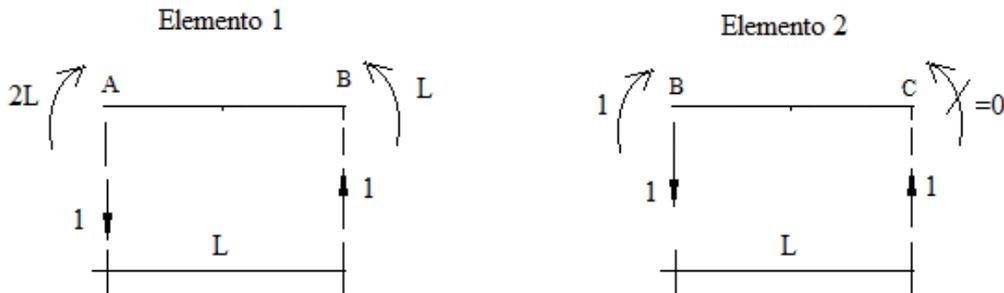


Figura (g)

De las Figuras (e) y (g) se obtienen las respectivas matrices $[A_{MQ}]$ de los dos elementos de la estructura.

Para el elemento 1

$$[A_{MQ}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -L & -2L \\ 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2

$$[A_{MQ}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -L \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, de acuerdo con la ec.(3.17a), las acciones de extremo de miembro para el elemento 1 son:

$$\begin{Bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \\ A_{M4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ PL \\ -\frac{2}{2} \\ 0 \\ \frac{3PL}{2} \\ 2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -L & -2L \\ 1 & 1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{69P}{56} \\ \frac{56}{64P} \\ -\frac{56}{56} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \\ A_{M4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{107P}{56} \\ \frac{56}{3PL} \\ \frac{56}{5P} \\ \frac{56}{20PL} \\ \frac{56}{56} \end{Bmatrix}$$

y para el elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \\ A_{M4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ PL \\ -\frac{2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -L \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{69P}{56} \\ \frac{56}{64P} \\ -\frac{56}{56} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{M1} \\ A_{M2} \\ A_{M3} \\ A_{M4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{64P}{56} \\ \frac{56}{36PL} \\ \frac{56}{64P} \\ -\frac{56}{0} \end{Bmatrix}$$

Nótese que $Q_1 = A_{M3}^{(1)} + A_{M1}^{(2)}$

$$Q_1 = \frac{5P}{56} + \frac{64P}{56} = \frac{69P}{56}$$

De igual modo que $Q_2 = A_{M3}^{(2)} = -\frac{64P}{56}$

y, finalmente, el momento externo $M=PL$ aplicado en B, es igual a

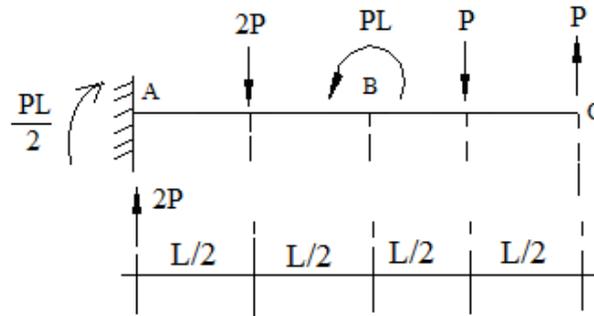
$$M = A_{M4}^{(1)} + A_{M2}^{(2)}$$

$$M = \frac{20PL}{56} + \frac{36PL}{56} = PL$$

(C) CÁLCULO DE LAS REACCIONES

(C1) Cálculo de las reacciones en la estructura libre debido a las cargas en la estructura original.

En la siguiente figura se muestra, de nuevo, la estructura libre sometida a las cargas que actúan en la viga original:



El vector $\{A_{RL}\}$ es:

$$\{A_{RL}\} = \begin{Bmatrix} A_{RL1} \\ A_{RL2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ -\frac{PL}{2} \end{Bmatrix}$$

(C2) Cálculo de las reacciones en la estructura libre debido a los valores unitarios de las redundantes.

De las Figuras (d) y (f), se concluye que la matriz de las reacciones debido a los valores unitarios de las redundantes $[A_{RQ}]$, es:

$$[A_{RQ}] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -L & -2L \end{bmatrix}$$

Luego, de acuerdo con la ec(3.17b):

$$\begin{Bmatrix} A_{R1} \\ A_{R2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2P \\ -\frac{PL}{2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -L & -2L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{69P}{56} \\ -\frac{64P}{56} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{R1} \\ A_{R2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{107P}{56} \\ \frac{31PL}{56} \end{Bmatrix}$$

El lector podrá comprobar que se verifica el requisito de equilibrio estático correspondiente a la viga original, quedando entonces completo el análisis del ejemplo propuesto.

A continuación se presenta en la Tabla 3.1 el resumen de la nomenclatura utilizada en el método de flexibilidad.

Tabla 3.1. Matrices y vectores usados en el método de flexibilidad

Matriz o Vector	Orden	Descripción
$[Q]$	$q \times 1$	Acciones redundantes desconocidas (q =número de redundantes).
$\{D_Q\}$	$q \times 1$	Desplazamientos en la estructura original correspondientes a las redundantes.
$\{D_{QL}\}$	$q \times 1$	Desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y debidos a las cargas.
$[F]$	$q \times q$	Desplazamientos en la estructura libre correspondientes a las redundantes y debido a los valores unitarios de las redundantes (coeficientes de flexibilidad).
$\{D_J\}$	$j \times 1$	Desplazamientos en la estructura original (j = número de desplazamientos nodales).
$\{D_{JL}\}$	$j \times 1$	Desplazamientos nodales en la estructura libre debido a las cargas.
$[D_{JQ}]$	$j \times q$	Desplazamientos nodales en la estructura libre debido a los valores unitarios de las redundantes.
$\{A_M\}$	$m \times 1$	Acciones de extremo de miembro en la estructura original (m = número de acciones de extremo de miembro).
$\{A_{ML}\}$	$m \times 1$	Acciones de extremo de miembro en la estructura libre debido a las cargas.

$[A_{MQ}]$	$m \times 1$	Acciones de extremo de miembro en la estructura libre debido a los valores unitarios de las redundantes.
$\{A_R\}$	$r \times 1$	Reacciones en la estructura actual (r = número de reacciones).
$\{A_{RL}\}$	$r \times 1$	Reacciones en la estructura libre debido a las cargas.
$[A_{RQ}]$	$r \times q$	Reacciones en la estructura libre debido a los valores unitarios de las redundantes

3.3.- El Método de la rigidez

Aunque los métodos de flexibilidad y de la rigidez son similares en su formulación matemática, los conceptos físicos involucrados en dichos métodos son distintos; sin embargo, en ambos métodos, las ecuaciones fundamentales se derivan utilizando el principio de la superposición.

Como ya vio, en el método de la flexibilidad, las variables desconocidas son las reacciones redundantes. En el método de la rigidez, las incógnitas son los desplazamientos en los nodos de la estructura. Por lo tanto, en este método el número de incógnitas que debe calcularse es igual al grado de la indeterminación cinemática.

Para ilustrar los conceptos del método de la rigidez en su modo más simple, considérese la viga de la Fig.3.6a. Debido a que el único desplazamiento de nodo desconocido, es la rotación θ_B , en el nodo B, esta viga es cinemáticamente indeterminada de primer grado. La primera fase del análisis es determinar esta rotación. Después de encontrar dicha rotación, pueden determinarse las diferentes acciones y desplazamientos en toda la viga.

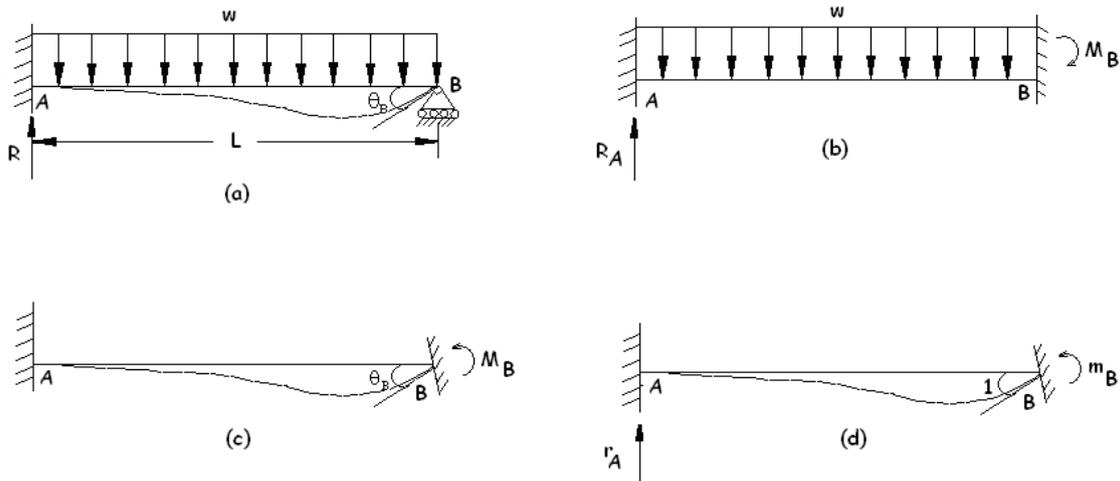


Fig. 3.6. Ilustración del método de la rigidez

En el método de la flexibilidad, una estructura libre, estáticamente determinada, se obtiene modificando la estructura real de modo tal que las acciones de las redundantes seleccionadas sean cero. La operación análoga en el método de la rigidez, consiste en obtener una estructura cinemáticamente determinada modificando la estructura real de modo tal que, todos los desplazamientos desconocidos sean cero. Como los desplazamientos desconocidos son las traslaciones y rotaciones de los nodos, éstos pueden hacerse iguales a cero impidiendo que los nodos de la estructura tengan desplazamiento de cualquier clase. La estructura obtenida al fijar todos los nodos de la estructura real se llama la “estructura fija”. Para la viga de la Fig.3.6a, la estructura fija se obtiene restringiendo la rotación del nodo B, tal como se muestra en la Fig.3.6b.

Cuando las cargas actúan sobre la viga fija (Fig.3.6b), existe un par flector M_B en el nodo B. Este par reactivo tiene sentido horario y viene dado (caso 6 de la Tabla 2), por:

$$M_B = \frac{wL^2}{12} \tag{3.18}$$

Nótese que el par M_B es una acción correspondiente a la rotación θ_B , que es la variable desconocida en el análisis de rigidez.

Debido a que en la viga real de la Fig.3.2a no existe momento en el nodo B, es necesario considerar que la viga fija está sujeta a un momento igual y de sentido opuesto al momento M_B . Dicho momento se muestra en la Fig. 3.6c.

Cuando se sobreponen las acciones que actúan en las vigas de las Figs.3.5b y 3.5c, se obtienen las acciones que actúan en la viga real. Por lo tanto, el análisis de la viga de la Fig.3.6a puede considerarse como la superposición de los análisis mostrados en las Figs. 3.6b y 3.6c. Se sigue, por lo tanto, que la rotación producida por el par M_B mostrado en la Fig. 3.6c es igual a θ_B ; es decir, la rotación desconocida en la viga real.

La relación entre el momento M_B y la rotación θ_B en la viga de la Fig.3.6c viene dado (caso 3 de la Tabla 4) por:

$$M_B = \frac{4EI}{L} \theta_B \quad (3.19)$$

donde, EI es la rigidez a la flexión de la viga. Igualando las dos expresiones anteriores, se obtiene:

$$\frac{wL^2}{12} = \frac{4EI}{L} \theta_B$$

es decir:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} \quad (3.20)$$

Una vez obtenido el valor de θ_B , las reacciones de la viga pueden ser calculadas mediante el principio de superposición y utilizando, de nuevo, la Tabla 2 (caso 6) y la Tabla 4 (caso 3). En efecto se tiene que:

$$R_A = \frac{wL}{2} + \frac{6EI}{L^2} \theta_B = \frac{wL}{2} + \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{wL^3}{48EI} \right) = \frac{5}{8} wL$$

$$R_B = \frac{wL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \theta_B = \frac{wL}{2} - \frac{6EI}{L^2} \left(\frac{wL^3}{48EI} \right) = \frac{3}{8} wL$$

$$M_A = \frac{wL^2}{2} + \frac{2EI}{L} \theta_B = \frac{wL^2}{2} + \frac{2EI}{L} \left(\frac{wL^3}{48EI} \right) = \frac{1}{8} wL^2$$

De forma análoga a la utilizada en el método de la flexibilidad, es conveniente considerar la estructura fija bajo el efecto de un momento unitario de la rotación desconocida.

El efecto de un valor unitario de la rotación desconocida, se muestra en la Fig.3.2d, donde la viga fija está sujeta a la acción de un par flector m_B , el cual produce un valor unitario de la rotación θ_B , en el extremo derecho de la viga.

Como el momento m_B es una acción correspondiente a la rotación θ_B y causada por un valor unitario de ésta (mientras todos los demás desplazamientos de los nodos se mantienen iguales a cero), se dice que m_B es un coeficiente de rigidez para la estructura fija. El valor del momento m_B viene dado es:

$$m_B = \frac{4EI}{L} \quad (3.21)$$

Al formular la ecuación de superposición, los momentos en el nodo B se sobrepondrán de la siguiente manera: el par en la viga fija sujeta a la carga (Fig.3.6b) se suma al par m_B (correspondiente a un valor unitario de θ_B). La suma de estos dos términos debe ser igual al momento en el nodo B de la viga real, que es, en este ejemplo, igual a cero.

Todos los términos en la ecuación de superposición se expresan con la misma convención de signos: todos los momentos y rotaciones en el nodo B son positivos cuando tienen el sentido anti-horario. De acuerdo con esta convención, el momento M_B en la viga de la Fig.3.6b, es negativo:

$$M_B = -\frac{wL^2}{12} \quad (3.22)$$

luego, la ecuación de superposición de momentos en el apoyo B es:

$$M_B + m_B\theta_B = 0 \quad (3.23)$$

es decir:

$$-\frac{wL^2}{12} + \frac{4EI}{L}\theta_B = 0 \quad (3.24)$$

luego:

$$\theta_B = \frac{wL^3}{48EI} \quad (3.25)$$

que, por supuesto, es el mismo resultado anterior.

El punto esencial de la solución anterior, consiste en escribir la ecuación de superposición (3.23), que expresa el hecho de que el momento en B, en la viga real, es igual a cero. En esta ecuación está incluido el momento producido por las cargas que actúan en la estructura fija, y el momento producido por la rotación del extremo B de la estructura fija.

El último término de dicha ecuación se expresó como el producto del momento causado por un valor unitario del desplazamiento desconocido (coeficiente de rigidez), multiplicado por el desplazamiento desconocido. Los dos efectos se suman algebraicamente utilizando la misma convención de signos para todos los términos de la ecuación.

Cuando se resuelve la ecuación para los desplazamientos desconocidos, el signo del resultado dará el sentido del desplazamiento. Esta ecuación puede llamarse ecuación de superposición, o bien, “*ecuación de equilibrio de nodo*” ya que, en esencia, expresa el equilibrio de momentos en el nodo B.

Una vez obtenido la rotación θ_B desconocida de la viga, es posible calcular los otros valores de interés, tales como las acciones de extremo de miembro y las reacciones. Como ejemplo, supóngase que se desea calcular la reacción R que actúa en el empotramiento de la viga de la Fig.5.6a. Esta fuerza es la suma de la correspondiente reacción R_A en el apoyo en la Fig.3.6b y θ_B multiplicada por la fuerza r_A en la Fig.3.6d; es decir:

$$R = R_A + \theta_B r_A \quad (3.26)$$

Las fuerzas R_A y r_A pueden calcularse fácilmente a partir de la viga fija (caso 6 de la Tabla 2 y Caso 3 de la Tabla 4):

$$R_A = \frac{wL}{2} \qquad r_A = \frac{6EI}{L^2}$$

Sustituyendo estos valores y el valor de θ_B ya calculado previamente en la ec. (3.25), el resultado es:

$$R = \frac{5wL}{8}$$

Para calcular cualesquiera otras acciones o desplazamientos de la viga se utiliza exactamente los mismos conceptos. Sin embargo, en todos los casos, se deben en primer lugar determinar los desplazamientos desconocidos de los nodos de la viga (o estructura).

Si una estructura es cinemáticamente indeterminada de mayor grado al primero, se debe introducir, al igual que en el método de la flexibilidad, un procedimiento más organizado para la solución, así como también una notación más generalizada.

Para ilustrar el procedimiento se utilizará el mismo ejemplo de una viga de dos claros ya examinada mediante el método de flexibilidad y que se muestra de nuevo en la Fig.3.7a.

Puesto que en los nodos B y C de la viga pueden rotar libremente, la estructura (despreciando las deformaciones axiales), es cinemáticamente indeterminada de segundo grado. En dicha figura, estas rotaciones están rotuladas por D_1 y D_2 , respectivamente. Se supondrá positivas las rotaciones anti-horario. Los desplazamientos desconocidos pueden ser calculados

resolviendo las ecuaciones de superposición para las acciones en los nodos B y C, tal como se describe a continuación.

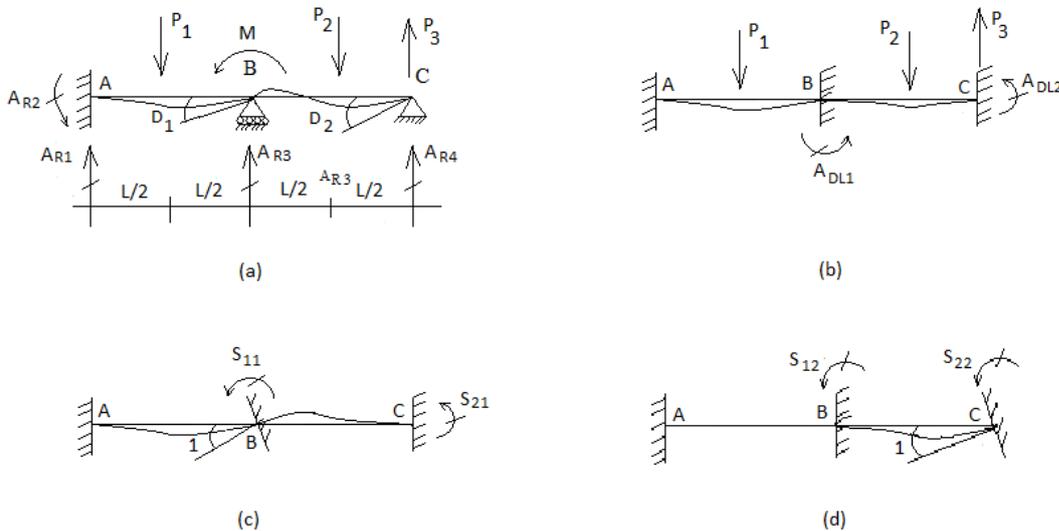


Fig.3.7. Ilustración del método de rigidez

El primer paso en el análisis, consiste en aplicar restricciones imaginarias a todos los nodos de la estructura para impedir cualquier desplazamiento de éstos. La estructura así fija, se muestra en la Fig.3.7b y consiste, en este caso, en dos vigas doblemente empotradas.

Sobre esta estructura actuarán todas las cargas excepto aquellas que correspondan a los desplazamientos desconocidos. En este caso sólo actuarán las cargas P_1 , P_2 y P_3 , tal como se muestra en la Fig.3.7b. Todas las cargas que correspondan a los desplazamientos de nodos desconocidos, tales como el momento flector M en este ejemplo, serán tomadas en consideración más adelante.

Los momentos A_{DL1} y A_{DL2} de la Fig.3.7b, son las acciones de las restricciones (sobre la estructura fija), correspondientes a D_1 y D_2 , respectivamente, y causadas por las cargas que actúan sobre la estructura. Por ejemplo, la acción de la restricción A_{DL1} es la suma del momento reactivo en B debido a la carga P_1 que actúa en el elemento AB y el momento reactivo en B debido a la carga P_2 que actúa en el elemento BC. Estas acciones pueden determinarse con la ayuda de las fórmulas para las vigas de extremo fijo (Tabla 2), como se verá más adelante.

Para generar los coeficientes de la matriz de rigidez en los nodos B y C se inducen, en la estructura fija, por separado, los valores unitarios de los desplazamientos desconocidos D_1 y D_2 . Un desplazamiento unitario correspondiente a D_1 consiste en una rotación del nodo B, tal como se muestra en la Fig.3.7c, mientras el desplazamiento D_2 permanece igual a cero. Entonces, las acciones correspondientes a D_1 y D_2 , son los coeficientes de rigidez S_{11} y S_{21} , respectivamente. Estas rigideces consisten en los momentos

ejercidos por las restricciones de las vigas en los nodos B y C, respectivamente. Cuando se dispone de las fórmulas para los momentos que se generan en una viga doblemente empotrada, estos cálculos son, en realidad, fáciles de efectuar. Su determinación en este ejemplo se realizará más adelante.

La condición del desplazamiento D_2 igual a la unidad, mientras D_1 es igual a cero, se muestra en la Fig.3.7d. En esta figura, la rigidez S_{12} es la acción correspondiente a D_1 mientras que la rigidez S_{22} es la acción correspondiente a D_2 . Nótese que en cada caso, el coeficiente de rigidez es la acción que la restricción artificial ejerce sobre la estructura.

Ahora puede escribirse la superposición de las dos estructuras que expresará la condición asociada al momento que actúa en la estructura original (Fig.3.7a), en los nodos B y C. En efecto, sean A_{D1} y A_{D2} las acciones en la estructura original correspondientes a D_1 y D_2 , respectivamente. Estas acciones serán igual a cero en todos los casos excepto cuando una acción externa concentrada, correspondiente a un grado de libertad, esté aplicada en el nodo. En este ejemplo, la acción A_{D1} es igual al momento M mientras la acción A_{D2} es igual a cero.

La ecuación de superposición expresa el hecho que las acciones en la estructura original (Fig.3.7a), son igual a las correspondientes acciones en la estructura fija debido a las cargas (Fig.3.7b) más las acciones correspondientes en la estructura fija debido a los desplazamientos unitarios (Fig.3.7c y Fig.3.7d), multiplicadas por sus propios desplazamientos. Luego, las ecuaciones de superposición son:

$$\begin{aligned} A_{D1} &= A_{DL1} + S_{11} D_1 + S_{12} D_2 \\ A_{D2} &= A_{DL2} + S_{21} D_1 + S_{22} D_2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La convención de signos usados en estas ecuaciones es que los momentos se consideran positivos cuando actúan en el mismo sentido (anti-horario) que los desplazamientos desconocidos.

En forma matricial, las ecs.(3.19) se expresan de la siguiente manera:

$$\{A_D\} = \{A_{DL}\} + [S]\{D\} \quad (3.28)$$

En esta ecuación, el vector $\{A_D\}$ representa las acciones en la viga original correspondientes a los desplazamientos nodales desconocidos $\{D\}$; el vector $\{A_{DL}\}$ representa las acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos nodales desconocidos y causadas por las cargas (es decir, todas las cargas excepto aquellas correspondientes a los desplazamientos desconocidos); y la matriz $[S]$ es la matriz de rigidez correspondiente a los desplazamientos desconocidos.

En el ejemplo de la estructura de la Fig.3.7a, éstos son:

$$\{A_D\} = \begin{Bmatrix} A_{D1} \\ A_{D2} \end{Bmatrix} \quad \{A_{DL}\} = \begin{Bmatrix} A_{DL1} \\ A_{DL2} \end{Bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix}$$

En general, estos vectores tendrán tantas filas como desplazamientos nodales desconocidos. Entonces, si d representa el número de desplazamientos desconocidos, el orden de la matriz $[S]$ será de $d \times d$, mientras que $\{A_D\}$, $\{A_{DL}\}$ y $\{D\}$ serán vectores de $d \times 1$.

De la (3.28) se sigue que:

$$\{D\} = [S]^{-1} (\{A_D\} - \{A_{DL}\}) \quad (3.29)$$

Esta ecuación permite obtener el vector de los desplazamientos nodales de la estructura $\{D\}$ ya que los coeficientes de $\{A_D\}$, $\{A_{DL}\}$ y $[S]$ son conocidos o pueden obtenerse de la estructura fija. Más aún, las acciones de extremo de miembro y las reacciones de la estructura pueden determinarse después que los desplazamientos nodales se conocen. El procedimiento para realizar dichos cálculos se mostrará más adelante.

A esta altura se debe observar que el término $-\{A_{DL}\}$ en la ecuación anterior representa el llamado vector de “cargas nodales equivalentes”. Dichas cargas se definen como las negativas de las acciones de restricción correspondientes a los desplazamientos nodales desconocidos, causadas por las cargas aplicadas a los elementos de la estructura fija. Cuando este conjunto de cargas nodales equivalentes se suman al vector de cargas actuales que actúan en los nodos $\{A_D\}$, el resultado es el llamado vector de “cargas nodales combinadas”. Entonces, el paréntesis en la (3.29), corresponde al vector de cargas nodales combinadas para el análisis del método de rigidez.

Después de determinar los desplazamientos nodales, el próximo paso consiste en calcular las acciones de extremo de miembro y las reacciones de la estructura. De igual modo que en el método de flexibilidad, cuando los cálculos se efectúan a mano hay dos formas de hacerlo.

Un modo consiste en obtener las acciones de extremo de miembro y las reacciones de la estructura efectuando cálculos separados después que los desplazamientos se han determinado. El otro modo es realizar los cálculos de un modo sistemático, en paralelo con los cálculos para determinar los desplazamientos. En este texto sólo utiliza este último procedimiento.

Para mostrar cómo se realizan estos cálculos, considérese de nuevo la viga de dos claros mostrada en la Fig.3.2. Al igual que en el método de flexibilidad, los vectores de las acciones de extremo de miembro y de reacciones en la estructura original (Fig.3.2a), se denotarán por $\{A_M\}$ y $\{A_R\}$, respectivamente.

En la estructura fija sujeta a las cargas mostradas en la Fig.3.2b, los vectores de las acciones de extremo de miembro y de reacciones $\{A_M\}$ y $\{A_R\}$ se denotarán por $\{A_{ML}\}$ y $\{A_{RL}\}$, respectivamente. De nuevo, se hace notar que cuando se hace cualquier referencia a las cargas en la estructura fija, se

asume que son todas las fuerzas que actúan sobre la estructura, con la excepción de aquellas cargas que corresponden a un desplazamiento desconocido. Entonces, en el nodo B, mostrado en la Fig.3.7a, la carga (momento) M, no aparece en la estructura fija (Fig.3.7b). Sin embargo, se consideran todas las otras cargas que actúan en la estructura fija, incluida la carga P_3 . Esta carga no afecta las acciones de extremo de miembro $\{A_{ML}\}$ en la estructura fija, pero sí las reacciones $\{A_{RL}\}$.

Cada uno de los vectores $\{A_M\}$ y $\{A_{ML}\}$ son del orden $m \times 1$, asumiendo que m representa el número de acciones de miembro a determinar. De igual modo, los vectores $\{A_R\}$ y $\{A_{RL}\}$ son del orden de $r \times 1$, donde r denota el número de reacciones a determinar.

En la estructura fija sujeta a desplazamientos unitarios (Fig.3.7c y Fig.3.7d), las matrices de acciones de extremo de miembro y reacciones serán denotados por $\{A_{MD}\}$ y $\{A_{RD}\}$, respectivamente. La primera columna de cada una de estas matrices contiene las acciones en la viga fija de la Fig.3.7c, mientras que la segunda columna está constituida por las acciones obtenidas en la viga en la Fig.3.7d. En el caso general, las matrices $\{A_{MD}\}$ y $\{A_{RD}\}$ son del orden de $m \times d$ y $r \times d$, respectivamente, donde d representa el número de desplazamientos desconocidos.

Las ecuaciones de superposición para las acciones de extremo de miembro y reacciones en la estructura original pueden expresarse en la siguiente forma matricial:

$$\begin{aligned} \{A_M\} &= \{A_{ML}\} + [A_{MD}]\{D\} \\ \{A_R\} &= \{A_{RL}\} + [A_{RD}]\{D\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

Estas dos últimas ecuaciones y la ec.(3.28) constituyen las tres ecuaciones de acciones del método de rigidez. La solución completa de una estructura consiste en obtener de la ec.(3.29), el vector de desplazamientos $\{D\}$, y entonces sustituir dicho vector en las ecs.(3.30) para determinar $\{A_M\}$ y $\{A_R\}$.

De este modo se determinan todos los desplazamientos de la estructura, las acciones de extremo de miembro y las reacciones de la estructura.

A continuación se seguirá el esquema descrito para determinar los desplazamientos nodales, las acciones de extremo de miembro y las reacciones del ejemplo de la viga de dos claros mostrada en la Fig.3.7, que se ha venido analizando mediante el método de flexibilidad.

(A) CÁLCULO DE LOS DESPLAZAMIENTOS NODALES:

(A1) Cálculo de los desplazamientos nodales en la estructura fija debido a las cargas en la estructura original.

Cuando P_1, P_2 y P_3 actúan sobre la estructura fija (Fig.3.7b), las restricciones en B y C generan las acciones A_{DL1} y A_{DL2} , correspondientes a D_1 y D_2 ,

respectivamente. Puesto que el momento M corresponde a uno de los desplazamientos desconocidos, se tomará en cuenta más adelante mediante el vector $\{A_D\}$. Estas acciones A_{DL1} y A_{DL2} se determinan mediante las fórmulas para momentos de una viga doblemente empotrada (Caso 1 de la Tabla 2), con $a=b=L/2$.

$$A_{DL1} = -\frac{P_1 L}{8} + \frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8}$$

$$A_{DL2} = -\frac{P_2 L}{8} = -\frac{PL}{8}$$

Por lo tanto el vector $\{A_{DL}\}$, viene dado por:

$$\{A_{DL}\} = \frac{PL}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Se debe notar que en estos cálculos que la carga P_3 no está presente en el vector $\{A_{DL}\}$, por lo tanto, no afecta los cálculos de los desplazamientos nodales. Sin embargo, como se verá más adelante, esta carga afecta los cálculos de las reacciones de la viga original.

(A2) Cálculo de los desplazamientos de los coeficientes de rigidez.

Los coeficientes de la matriz de rigidez $[S]$ están indicados en la Fig.3.7c y en la Fig.3.7d. Cada coeficiente es un momento que corresponde a uno de los desplazamientos desconocidos y debido a un valor unitario de uno de ellos mientras todos los demás permanecen iguales a cero. Los elementos de la primera columna de matriz de rigidez $[S]$ se muestran en la Fig.3.7c, y los elementos de la segunda columna de dicha matriz se muestran en la Fig.3.7.d). Para encontrar estos coeficientes, considérese en primer lugar la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig.3.8 (Ver Tabla 4, caso 3).

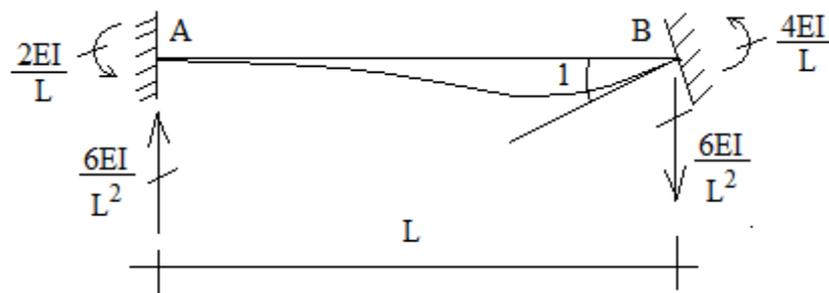


Fig.3.8. Coeficientes de rigidez de un elemento de viga

Esta viga está sometida a una rotación unitaria en el extremo B con lo cual se genera un momento flector en el extremo B igual a $\frac{4EI}{L}$, mientras que en el

extremo opuesto, el momento que se genera es igual a $\frac{2EI}{L}$. Las fuerzas reactivas en los extremos de la viga son iguales a $\frac{6EI}{L^2}$.

Todas las acciones mostradas en la Fig.3.8 son llamadas “rigidez de miembro” ya que son acciones en los extremos del miembro debido a un desplazamiento unitario de un extremo del mismo.

Considerando los resultados anteriores es posible ahora determinar los coeficientes de rigidez S_{11} y S_{21} mostrados en la Fig.3.7c. Cuando la viga rota un ángulo unitario en el nodo B, se genera un momento igual $\frac{4EI}{L}$ debido a la rotación de extremo de miembro AB. También, se genera, en el mismo nodo B, un momento igual a $\frac{4EI}{L}$ debido a la rotación de extremo de miembro BC.

Luego, el momento total en B, igual a S_{11} , es:

$$S_{11} = \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{L} = \frac{8EI}{L}$$

El coeficiente de rigidez S_{21} es el momento generado en el nodo C cuando el nodo B gira un ángulo unitario. Este coeficiente de rigidez es igual a:

$$S_{21} = \frac{2EI}{L}$$

Ambos S_{11} y S_{21} son positivos ya que actúan en sentido anti-horario. Los coeficientes S_{12} y S_{22} , se muestran en la Fig.3.7d. El primero de éstos es igual a $\frac{2EI}{L}$, y el segundo igual $\frac{4EI}{L}$. La matriz de rigidez viene entonces dada por:

$$[S] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ahora puede determinarse la inversa de la matriz [S].

$$[S]^{-1} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

El próximo paso consiste en la determinación del vector $\{A_D\}$ que representa las acciones en la estructura original correspondiente a los desplazamientos desconocidos. En este ejemplo, la carga externa

correspondiente al desplazamiento D_1 , es el momento M (igual a PL), en el punto B. No hay momento en el nodo C correspondiente a D_2 y, por lo tanto, el vector $\{A_D\}$ viene dado por:

$$\{A_D\} = \begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Ahora, con los vectores $\{A_D\}$ y $\{A_{DL}\}$ y la matriz $[S]^{-1}$ ya obtenidos, se determina el vector de desplazamientos $\{D\}$ en la estructura original, mediante la ec.(3.29):

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{14EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} PL \\ 0 \end{Bmatrix} - \frac{PL}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \right\}$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \frac{PL^2}{112EI} \begin{Bmatrix} 17 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

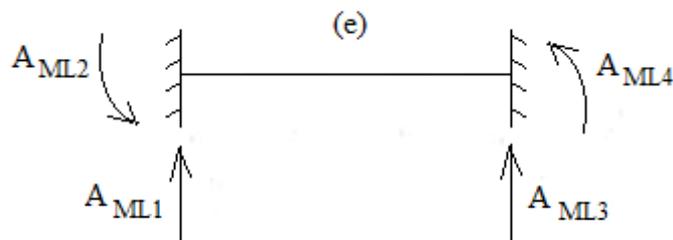
Estos resultados concuerdan, por supuesto, con los obtenidos mediante el método de flexibilidad visto anteriormente.

Una vez conocido el vector de desplazamientos nodales $\{D\}$ sólo resta determinar los vectores $\{A_{ML}\}$, $\{A_{RL}\}$ y las matrices $[A_{MD}]$ y $[A_{RD}]$.

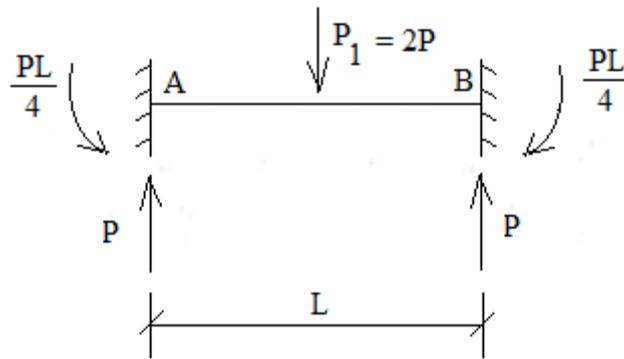
(B) CÁLCULO DE LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO:

(B1) Cálculo de las acciones de extremo de miembro en la estructura fija debido a las cargas en la estructura original.

Las acciones de extremo de miembro, en la estructura fija debido a las cargas externas, para un elemento arbitrario (e), se muestra en la siguiente figura.



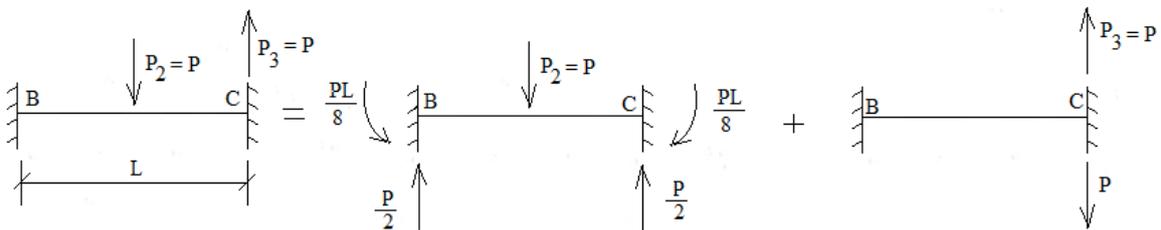
Las acciones de extremo de miembro en la estructura fija que se generan en el elemento 1 se muestran en la siguiente figura.



Por lo tanto el vector $\left\{ A_{ML}^{(1)} \right\}$ viene dado por:

$$\left\{ A_{ML}^{(1)} \right\} = \begin{Bmatrix} A_{ML1}^{(1)} \\ A_{ML2}^{(1)} \\ A_{ML3}^{(1)} \\ A_{ML4}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ PL \\ 4 \\ P \\ PL \\ 4 \end{Bmatrix}$$

En la siguiente figura se muestran las acciones de extremo de miembro en la estructura fija que se generan en el elemento 2.

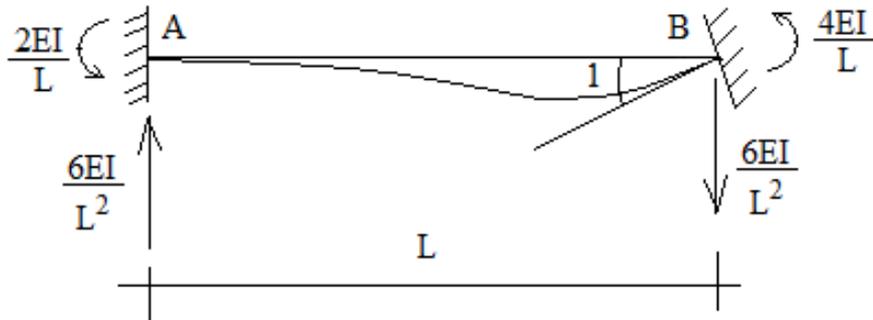


Por lo tanto el vector $\left\{ A_{ML}^{(2)} \right\}$ viene dado por:

$$\left\{ A_{ML}^{(2)} \right\} = \begin{Bmatrix} A_{ML1}^{(2)} \\ A_{ML2}^{(2)} \\ A_{ML3}^{(2)} \\ A_{ML4}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \\ PL \\ 8 \\ \frac{P}{2} - P \\ -\frac{PL}{8} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{Bmatrix}$$

(B2) Determinación de las matrices $[A_{MD}]$ para cada uno de los elementos que conforman la estructura.

Para el elemento 1 (ver caso 3 de la Tabla 4), se tiene:



Es fácil ver que para este elemento la matriz $[A_{MD}]$, viene dada por:

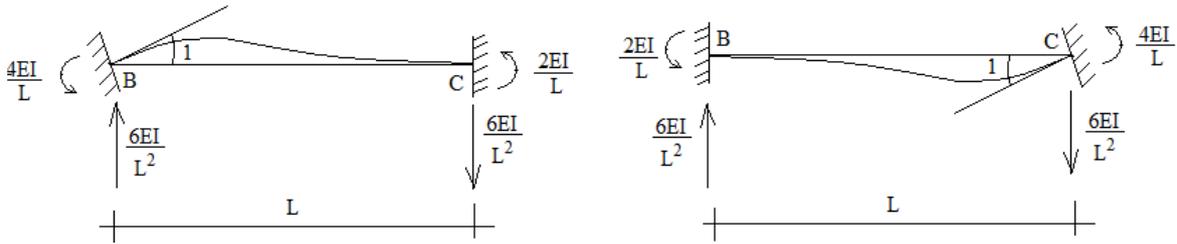
$$[A_{MD}]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{2EI}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{4EI}{L} & 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2L & 0 \\ -6 & 0 \\ 4L & 0 \end{bmatrix}$$

y por lo tanto, de acuerdo con la primera de las ecs.(3.30):

$$\{A_M\}^{(1)} = \{A_{ML}\}^{(1)} + [A_{MD}]^{(1)}\{D\}$$

$$\{A_M\}^{(1)} = \begin{bmatrix} A_{M1}^{(1)} \\ A_{M2}^{(1)} \\ A_{M3}^{(1)} \\ A_{M4}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ PL \\ 4 \\ -\frac{PL}{4} \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2L & 0 \\ -6 & 0 \\ 4L & 0 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{107P}{56} \\ \frac{31PL}{56} \\ \frac{5P}{56} \\ \frac{20PL}{56} \\ \frac{56}{56} \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2 (ver caso 3 de la Tabla 4), se tiene:



Para este elemento la matriz $[A_{MD}]$ viene dada por:

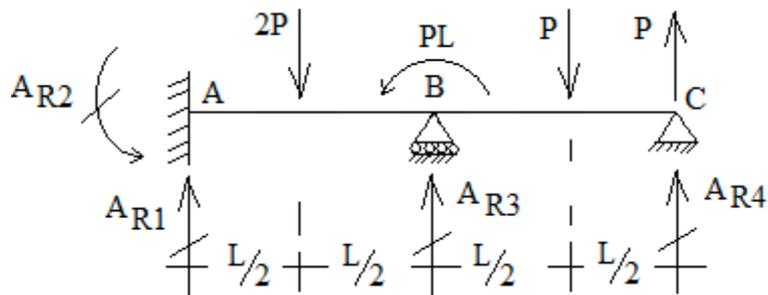
$$[A_{MD}^{(2)}] = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4L & 2L \\ -6 & -6 \\ 2L & 4L \end{bmatrix}$$

y por lo tanto, de acuerdo con la primera de las ecs.(3.30):

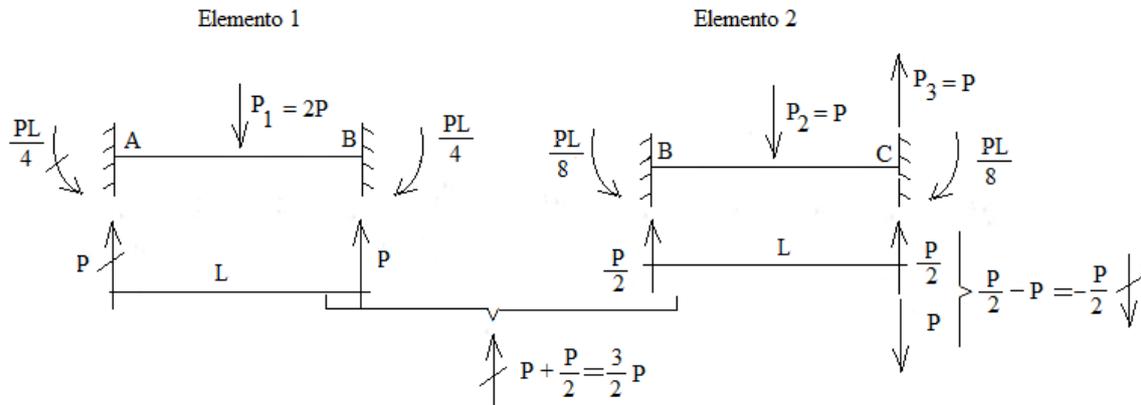
$$\begin{aligned} \{A_M^{(2)}\} &= \{A_{ML}^{(2)}\} + [A_{MD}^{(2)}]\{D\} \\ \{A_M^{(2)}\} &= \begin{bmatrix} A_{M1}^{(2)} \\ A_{M2}^{(2)} \\ A_{M3}^{(2)} \\ A_{M4}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{PL}{8} \\ -\frac{P}{2} \\ -\frac{PL}{8} \end{bmatrix} + \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 4L & 2L \\ -6 & -6 \\ 2L & 4L \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} \begin{bmatrix} 17 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{64P}{56} \\ \frac{56}{36PL} \\ \frac{56}{64P} \\ -\frac{56}{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(C) CÁLCULO DE LAS REACCIONES.

Las reacciones a calcular, A_{R1} , A_{R2} , A_{R3} y A_{R4} , en este problema se muestran en la figura a continuación.



(C1) Las acciones de extremo de miembro para la viga fija debido a las cargas externas se muestran en la siguiente figura.

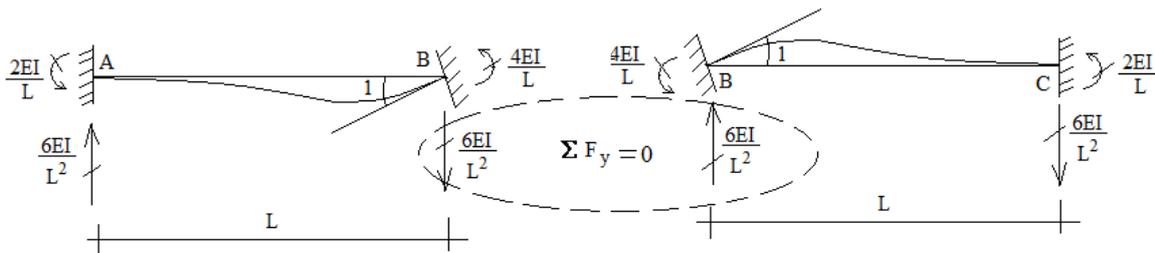


De la figura anterior se observa que el vector de reacciones $\{A_{RL}\}$ viene dado por

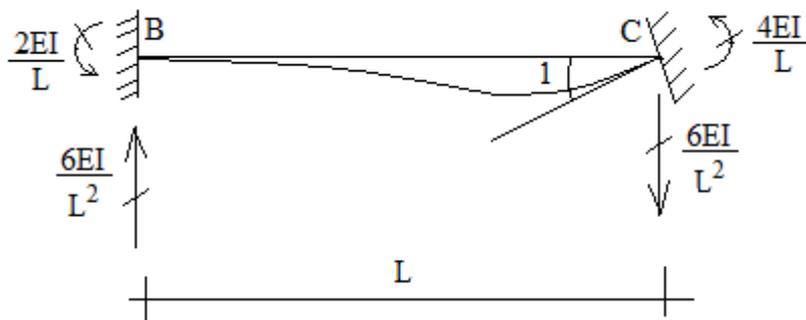
$$\{A_{RL}\} = \begin{Bmatrix} P \\ PL \\ 4 \\ 3P \\ 2 \\ P \\ -\frac{P}{2} \end{Bmatrix}$$

(C2) Determinación de la matriz $[A_{RD}]$.

Debido al desplazamiento D_1 :



Debido a D_2 :



Luego, de las dos figuras anteriores es fácil verificar que:

$$[A_{RD}] = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2L & 0 \\ 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix}$$

y finalmente:

$$\{A_R\} = \begin{Bmatrix} A_{R1} \\ A_{R2} \\ A_{R3} \\ A_{R4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{P}{PL} \\ \frac{4}{3P} \\ \frac{2}{P} \\ -\frac{2}{2} \end{Bmatrix} + \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 2L & 0 \\ 0 & 6 \\ -6 & -6 \end{bmatrix} \frac{PL^2}{112EI} \begin{Bmatrix} 17 \\ -5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{107P}{56} \\ \frac{56}{31PL} \\ \frac{56}{69P} \\ \frac{56}{64P} \\ -\frac{56}{56} \end{Bmatrix}$$

Estos resultados concuerdan, obviamente, con los obtenidos mediante el método de flexibilidad.

El método de solución descrito anteriormente para la viga de dos claros de la Fig.3.7 es completamente general en sus conceptos básicos y las ecuaciones matriciales dadas por ecs.(2.28), (2.29) y (2.30) pueden usarse en la solución de cualquier tipo de estructura. De igual modo estas ecuaciones se aplican a estructuras con cualquier número de grados de indeterminación cinemática n , en cuyo caso el orden de la matriz de rigidez será $n \times n$.

La siguiente tabla resume las matrices y vectores que se utilizan en el análisis de una estructura mediante el método de rigidez.

Tabla 3.2. Matrices y vectores usados en el método de rigidez

Matriz o Vector	Orden	Descripción
$[D]$	$d \times 1$	Desplazamientos nodales desconocidos (d=número de desplazamientos).
$\{A_D\}$	$d \times 1$	Acciones en la estructura original correspondientes a los desplazamientos desconocidos.
$\{A_{DL}\}$	$d \times 1$	Acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debido a todas las cargas excepto aquellas correspondientes a los desplazamientos desconocidos.
$[S]$	$d \times d$	Acciones en la estructura fija correspondientes a los desplazamientos desconocidos y debido a los valores unitarios de los desplazamientos. (Coeficientes de rigidez).
$\{A_M\}$	$m \times 1$	Acciones de extremo de miembro en la estructura original (m=número de acciones de extremo de miembro).
$\{A_{ML}\}$	$m \times 1$	Acciones de extremo de miembro en la estructura fija y debido a todas las cargas excepto aquellas correspondientes a los desplazamientos desconocidos
$[A_{MD}]$	$m \times d$	Acciones de extremo de miembro en la estructura fija debido a los valores unitarios de los desplazamientos desconocidos.
$\{A_R\}$	$r \times 1$	Reacciones en la estructura actual (r=número de reacciones).
$\{A_{RL}\}$	$r \times 1$	Reacciones en la estructura fija debido a todas las cargas excepto aquellas que corresponden a los desplazamientos desconocidos.
$[A_{RD}]$	$r \times q$	Reacciones en la estructura fija debido a los valores unitarios de los desplazamientos.

3.4.- Comparación de los métodos de flexibilidad y rigidez

Los métodos de flexibilidad y de la rigidez son muy similares en su formulación matemática, y los dos hacen uso del principio de superposición para poder obtener las ecuaciones fundamentales.

En el método de la flexibilidad, la selección de las redundantes puede tener un efecto significativo en la cantidad de trabajo de cálculo necesario. Por ejemplo, en vigas continuas, generalmente se seleccionan los momentos flectores en los apoyos como redundantes, debido a que la estructura libre

consiste en una serie de vigas simplemente apoyadas. Esta estructura libre es fácil de analizar tanto para los efectos de las cargas, como para los efectos de los valores unitarios de las redundantes. La aplicación de un valor unitario de cada redundante influye únicamente en los claros adyacentes a la viga. Otras selecciones para las redundantes no permiten esta localización ventajosa de efectos y, por el contrario, los efectos de una redundante unitaria pueden propagarse por toda la estructura. En el caso de estructuras que no sean vigas continuas, normalmente no es posible localizar efectos cuando se utiliza el método de la flexibilidad.

En el método de la rigidez, nunca existe duda acerca de la selección de la estructura fija, ya que sólo existe una posibilidad. El análisis de la estructura fija, usualmente no es difícil debido que todos los efectos están localizados. Por ejemplo, el efecto de un desplazamiento unitario en un nodo está limitado a los elementos que concurren a ese nodo.

En general, ambos métodos de análisis son útiles para cálculos a mano. El método de solución preferido será, por regla general, el que involucre la menor cantidad de incógnitas. Para cálculos automáticos, el método de la rigidez es mucho más apropiado que el método de la flexibilidad. La ventaja de este método, está asociada a la determinación automática de la estructura fija, y en el hecho de que todos los efectos están localizados. Como es lógico suponer, ocasionalmente se podrán encontrar excepciones a esta regla.

Cuando se trata de automatizar los cálculos para determinar los desplazamientos, las fuerzas en los extremos de los elementos y las reacciones de una estructura cinemáticamente indeterminada de alto grado (que es caso de la mayoría de las estructuras de interés práctico), el método de rigidez es, sin duda, el preferido ya que la estructura fija asociada a la estructura real, es única y fácil de obtener. En este caso, las relaciones entre los desplazamientos y las fuerzas que los originan, se expresaron mediante un conjunto de ecuaciones, dando origen a lo que se da en llamar "matriz de rigidez" de cada elemento que conforma la estructura, y se hace uso de técnicas apropiadas para realizar el ensamblaje de estas matrices en una matriz global, que expresa el comportamiento de toda la estructura en estudio. La gran ventaja de este procedimiento radica en el hecho de que, prácticamente, todos los parámetros envueltos en el mismo pueden interpretarse mediante principios físicos.

RESUMEN DEL MÉTODO DE FLEXIBILIDAD

1.- ESTRUCTURA ACTUAL.

2.- ESTRUCTURA LIBRE [SELECCIÓN DE LAS REDUNDANTES].

3.- CÁLCULO DEL VECTOR $\{D_{QL}\}$:

DESPLAZAMIENTOS EN LA ESTRUCTURA LIBRE
CORRESPONDIENTES A LAS REDUNDANTES Y DEBIDO A LAS
CARGAS.

4.- CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD F_{ij} :

DESPLAZAMIENTOS EN LA ESTRUCTURA LIBRE
CORRESPONDIENTES A LA REDUNDANTE Q_i CAUSADOS
POR EL VALOR UNITARIO DE LA REDUNDANTE Q_j
[COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD].

5.- DETERMINAR EL VECTOR $\{D_Q\}$:

VECTOR DE LOS DESPLAZAMIENTOS ACTUALES
CORRESPONDIENTES A LAS REDUNDANTES.

6.- RESOLVER LA ECUACIÓN:

$$\{D_Q\} = \{D_{QL}\} + [F]\{Q\}$$

ES DECIR, DETERMINAR EL VECTOR $\{Q\}$:

$$\{Q\} = [F]^{-1} (\{D_Q\} - \{D_{QL}\})$$

7.- CÁLCULO DEL VECTOR $\{D_{JL}\}$:

DESPLAZAMIENTOS NODALES EN LA ESTRUCTURA LIBRE
DEBIDO A LAS CARGAS.

8.- CÁLCULO DE LA MATRIZ $[D_{JQ}]$

DESPLAZAMIENTOS NODALES EN LA ESTRUCTURA LIBRE
DEBIDO A LOS VALORES UNITARIOS DE LAS REDUNDANTES.

8.- CÁLCULO DEL VECTOR $\{D_J\}$;

DESPLAZAMIENTOS NODALES EN LA ESTRUCTURA
ORIGINAL:

$$\{D_J\} = \{D_{JL}\} + [D_{JQ}]\{Q\}$$

9.-CÁLCULO DE LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO $\{A_M\}$ EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL.

9(A).- CÁLCULO DEL VECTOR DE EXTREMO DE MIEMBRO EN LA ESTRUCTURA LIBRE $\{A_{ML}\}$ [PARA CADA ELEMENTO] DEBIDO A LAS CARGAS.

9(B).- CÁLCULO DE LA MATRIZ $[A_{MQ}]$ DE LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO EN LA ESTRUCTURA LIBRE [PARA CADA ELEMENTO], DEBIDO A LOS VALORES UNITARIOS DE LAS REDUNDANTES.

9(C) RESOLVER LA ECUACIÓN:

$$\{A_M\} = \{A_{ML}\} + [A_{MQ}]\{Q\}$$

10.-CÁLCULO DE LAS REACCIONES $\{A_R\}$ EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL.

10(A).- CÁLCULO DEL VECTOR DE REACCIONES $\{A_{RL}\}$ EN LA ESTRUCTURA LIBRE DEBIDO A LAS CARGAS.

10(B).- CÁLCULO DE LA MATRIZ $[A_{RQ}]$ DE LAS REACCIONES EN LA ESTRUCTURA LIBRE DEBIDO A LOS VALORES UNITARIOS DE LAS REDUNDANTES.

11.- RESOLVER LA ECUACIÓN:

$$\{A_R\} = \{A_{RL}\} + [A_{RQ}]\{Q\}$$

RESUMEN DEL MÉTODO DE RIGIDEZ

1.-ESTRUCTURA ACTUAL.

2.-ESTRUCTURA FIJA [TODOS LOS DEPSPLAZAMIENTOS DE LA ESTRUCTURA IGUALES A CERO].

3.-DETERMINAR EL VECTOR $\{A_D\}$ QUE REPRESENTA LAS ACCIONES EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL CORRESPONDIENTES A LOS DESPLAZAMIENTOS CONOCIDOS.

4.-CÁLCULO DEL VECTOR $\{A_{DL}\}$:

ACCIONES EN LA ESTRUCTURA FIJA CORRESPONDIENTES A LOS DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS Y DEBIDO A TODAS LAS CARGAS, EXCEPTO LAS QUE CORRESPONDAN A LOS DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS.

5.-CÁLCULO DE LOS COEFICIENTES DE RIGIDEZ S_{ij} :

ACCIONES EN LA ESTRUCTURA FIJA CORRESPONDIENTES A LOS DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS Y DEBIDO A LOS VALORES UNITARIOS DE LOS DESPLAZAMIENTOS [COEFICIENTES DE RIGIDEZ].

6.-CÁLCULO DEL VECTOR DE DESPLAZAMIENTOS EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL $\{D\}$:

VECTOR DE LAS ACCIONES EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL CORRESPONDIENTES A LOS DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS.

ES DECIR, DE LA ECUACIÓN:

$$\{A_D\} = \{A_{DL}\} + [S]\{D\}$$

OBTENER:

$$\{D\} = [S]^{-1} (\{A_D\} - \{A_{DL}\})$$

7.-CÁLCULO DEL VECTOR $\{A_M\}$ DE LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL

7(a).- CÁLCULO DEL VECTOR LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO EN LA ESTRUCTURA FIJA $\{A_{ML}\}$.

7(b).- CÁLCULO DE MATRIZ DE LAS ACCIONES DE EXTREMO DE MIEMBRO EN LA ESTRUCTURA FIJA DEBIDO A LOS VALORES UNITARIOS DE LOS DESPLAZAMIENTOS DESCONOCIDOS $[A_{MD}]$

7(c).- RESOLVER LA ECUACIÓN:

$$\{A_M\} = \{A_{ML}\} + [A_{MD}]\{D\};$$

8.-CÁLCULO DE LAS REACCIONES $\{A_R\}$ EN LA ESTRUCTURA ORIGINAL.

8(a).-CÁLCULO DEL VECTOR DE REACCIONES $\{A_{RL}\}$ EN LA ESTRUCTURA LIBRE DEBIDO A LAS CARGAS.

8(b).-CÁLCULO DE LA MATRIZ $[A_{RQ}]$ DE LAS REACCIONES EN LA ESTRUCTURA LIBRE DEBIDO A LOS VALORES UNITARIOS DE LAS REDUNDANTES.

9.-RESOLVER LA ECUACIÓN:

$$\{A_R\} = \{A_{RL}\} + [A_{RD}]\{D\}$$

IV.- ASPECTOS COMPUTACIONALES DEL MÉTODO DE RIGIDEZ

4.1.- Introducción

En este capítulo se presentará la forma como se construyen las ecuaciones fundamentales del método de rigidez, para lo cual se requiere, apenas, conocer las nociones básicas del álgebra matricial y de la mecánica de materiales. El enfoque a presentar envuelve la aplicación de las condiciones de equilibrio y la continuidad del desplazamiento en los nodos de la estructura.

El objetivo principal de este capítulo es dar al lector la estructura general del método, y su traducción en un programa computacional de cálculo central: formación de las ecuaciones a nivel de cada elemento que conforma la estructura, ensamblaje de estas ecuaciones de modo que representen el comportamiento global de la misma, introducción de las condiciones de contorno, solución del sistema de ecuaciones global resultante e interpretación de los resultados. Para ilustrar el procedimiento, sólo se presentarán, en este capítulo, ejemplos de elementos estructurales sometidos a carga axial, sin que por ello conlleve ninguna particularización de dicho procedimiento.

4.2.- Nodos y grados de libertad

Como ya se mencionó, las incógnitas asociadas al método de rigidez, son los desplazamientos de los nodos de los elementos. Los nodos son aquellos puntos donde el equilibrio es forzado a verificarse y donde, también, se deben determinar los desplazamientos. Generalmente, para un gran número de elementos estructurales, los nodos están localizados en los extremos de los elementos.

De igual modo, ya se ha establecido que el número de grados de libertad en un nodo, es igual al número de desplazamientos necesarios posibles de ese nodo. Es decir, es el número de desplazamientos necesarios que hay que especificar, para definir, completamente, la posición de un nodo. Por lo tanto, para un elemento unidimensional, donde los desplazamientos están restringidos a la traslación en la dirección axial del elemento, cada nodo tiene un solo grado de libertad. Para un elemento bidimensional, como una armadura plana, cada nodo tiene dos grados de libertad, que corresponden a las traslaciones en dos direcciones (digamos; x, y). Para un elemento de viga, en cada nodo se hay dos grados de libertad, una traslación y una rotación. Para un pórtico plano, cada nodo tiene capacidad de trasladarse en dos direcciones y rotar alrededor de un eje. Por lo tanto, en este caso, cada nodo tiene tres grados de libertad.

Puesto que en el método de rigidez las incógnitas son los desplazamientos, el número de grados de libertad indicará el número de ecuaciones simultáneas que deberán resolverse en un problema dado. Cada estructura tiene, por supuesto, un número de restricciones (en los apoyos), de modo que el posible movimiento de cuerpo rígido de la misma, sea eliminado. Luego el número de ecuaciones que debe resolverse es, en definitiva, igual al número de grados de libertad de la estructura menos el número de restricciones presente en la misma.

4.3.- Definición de coeficiente de rigidez

Considérese el resorte elástico – lineal con un extremo fijo, sujeto a una fuerza f en el extremo libre, que se muestra en la Fig.4.1. La relación entre la fuerza y el desplazamiento resultante es $f = k \cdot u$, donde k es la constante del resorte, y u es el desplazamiento del extremo libre.

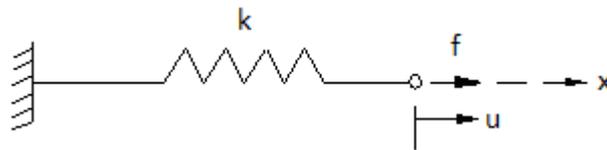


Fig.4.1 Resorte lineal con un extremo fijo

Nótese que k es la fuerza correspondiente a un desplazamiento unitario ($u = 1$).

Considérese ahora un resorte elástico – lineal, de extremos i y j , el cual forma parte de un sistema de resortes (en equilibrio), tal como se muestra en la Fig.4.2. En este caso, debido a la acción de los resortes adyacentes, actúan las fuerzas f_1 y f_2 en los extremos del resorte, siendo u_1 y u_2 los correspondientes desplazamientos. Los extremos i y j del resorte, son los nodos del “elemento resorte” y los desplazamientos u_1 y u_2 , como ya se estableció, son los grados de libertad de dicho elemento.

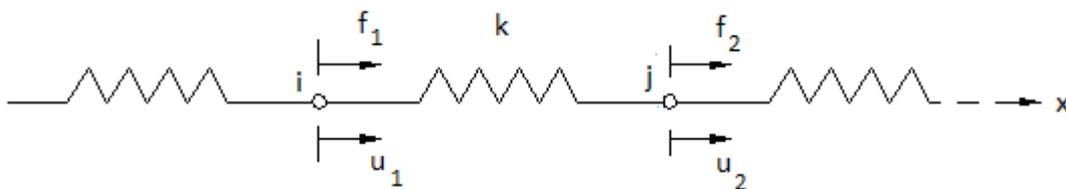


Fig.4.2. Sistema de resortes

Del equilibrio de fuerzas sobre el resorte se tiene

$$f_1 + f_2 = 0 \Rightarrow f_1 = -f_2 \tag{4.1}$$

Puesto que el nodo i se desplazó u_1 y el nodo j se desplazó u_2 , la elongación total del resorte es $u_1 - u_2$ y, por lo tanto, este resorte se comporta exactamente igual al resorte de la Fig.4.1, con una fuerza f_2 y un desplazamiento igual a u_1 y u_2 .

Luego,

$$f_2 = k(u_2 - u_1)$$

(4.2)

$$f_1 = k(u_1 - u_2)$$

En notación matricial, estas ecuaciones se pueden escribir del siguiente modo:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3a)$$

o, en forma compacta:

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (4.3b)$$

Donde la matriz $[k]$ se conoce con el nombre de “matriz de rigidez” del elemento. Los índices i y j de los elementos de esta matriz, k_{ij} , denotan la localización de cada coeficiente de rigidez de la i -ésima fila y j -ésima columna de dicha matriz; $\{u\}$ es el vector de desplazamientos nodales y $\{f\}$ es el vector de fuerzas nodales del elemento.

La definición de un coeficiente de rigidez k_{ij} es la siguiente:

“ k_{ij} se define como la fuerza requerida en el nodo i para producir un desplazamiento unitario en el nodo j , suponiendo que todos los demás desplazamientos son iguales a cero”.

Esta definición es consistente ya que en cada nodo sólo existe una fuerza y un desplazamiento.

Supóngase ahora que se tiene el caso mostrado en la Fig.4.3. Se tiene una estructura formada por dos resortes, de constantes k_1 y k_2 , y tres nodos.

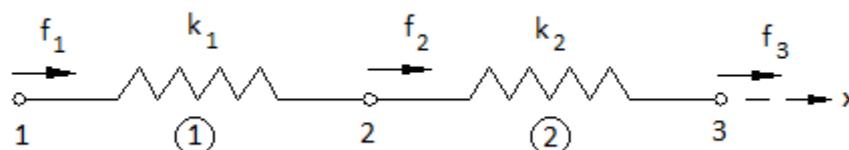


Fig.4.3. Estructura formada por dos resortes

Los dos resortes están conectados en el nodo 2. La estructura tiene tres grados de libertad (tres traslaciones; una en cada nodo de la estructura). Luego, la matriz de la estructura será de 3x3. Dicha matriz se determinará a partir de la definición de coeficiente de rigidez dada anteriormente. Es decir, se dará un desplazamiento unitario en cada nodo, mientras los demás nodos tendrán desplazamiento nulo, y se determinará la fuerza generada, por este desplazamiento, en los demás nodos.

Las fuerzas y los desplazamientos se considerarán positivos cuando actúan en el sentido positivo de x. En la Fig.4.4 se muestra las acciones en los nodos de cada resorte, asociadas a los desplazamientos unitarios en los mismos.

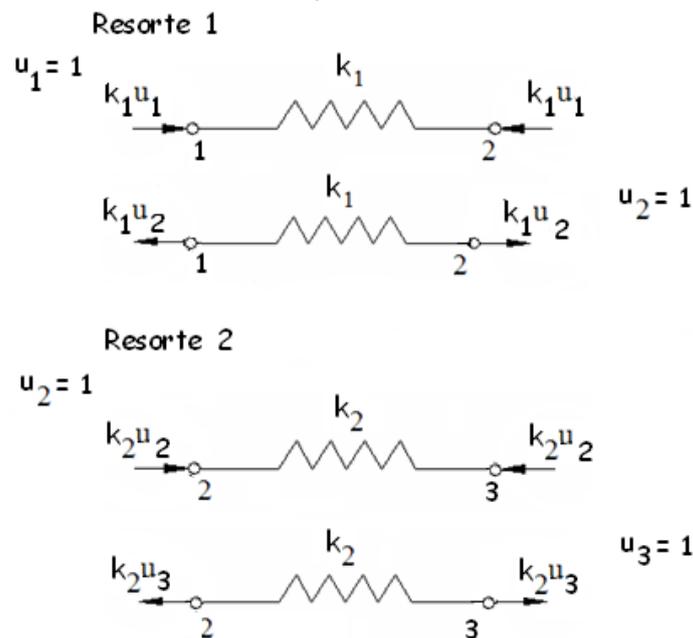


Fig.4.4. Diagrama de cuerpo libre de los resortes

El equilibrio estático demanda que $\sum F_x = 0$, luego:

$$\begin{aligned} \text{Nodo 1: } & k_1 u_1 - k_1 u_2 = f_1 \\ \text{Nodo 2: } & -k_1 u_1 + k_1 u_2 - k_2 u_2 + k_2 u_3 = f_2 \\ \text{Nodo 3: } & -k_2 u_2 + k_2 u_3 = f_3 \end{aligned}$$

En forma matricial, este sistema de ecuaciones se escribe:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4a)$$

o, en forma compacta:

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (4.4b)$$

y, por lo tanto, la matriz de rigidez de la estructura es:

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La solución de este sistema de ecuaciones se puede obtener invirtiendo esta matriz de rigidez; es decir:

$$\{u\} = [k]^{-1} \{f\} \quad (4.6)$$

Para que la matriz $[k]$ tenga inversa, es necesario que su determinante sea distinto de cero. Calculando dicho determinante (regla de Cramer)

$$|k| = k_1 \begin{vmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{vmatrix} - (-k_1) \begin{vmatrix} -k_1 & -k_2 \\ 0 & k_2 \end{vmatrix} = k_1(k_1 k_2 + k_2^2 - k_2^2) + k_1(-k_1 + k_2) \equiv 0$$

Es decir, la matriz del sistema es singular, lo cual significa que tiene un número infinito de soluciones.

Nótese que la estructura no tiene ningún soporte que restrinja el movimiento de algún nodo, lo cual quiere decir que la misma sólo posee movimiento de cuerpo rígido. Es decir, la estructura tendrá un número infinito de posibilidades de configuraciones de desplazamientos.

Para que este sistema tenga solución única, habrá que introducir las condiciones de contorno; es decir, restringir el movimiento en algún modo.

Nótese que la matriz es simétrica y que la suma de los coeficientes de rigidez de cada columna es igual a cero. Esto último es consecuencia directa del equilibrio nodal de las fuerzas.

4.4.- Matriz local de rigidez

La matriz de rigidez de la estructura de dos resortes obtenida anteriormente, puede formarse a partir de "ensamblaje" adecuado de la matriz de rigidez de cada uno de los elementos que la conforman. Cada una de estas matrices recibe el nombre de matriz de rigidez local.

Antes de mostrar cómo se construye estas matrices, se debe hacer referencia a la notación a utilizar. En la estructura constituida por dos resortes mostrada Fig.4.3, se puede observar la numeración de los nodos de la misma. Esta numeración se conoce con el nombre de "numeración global" de los nodos, la cual, en principio, es arbitraria. Además de esta numeración, se debe establecer la llamada "numeración local" de los nodos asociada a cada elemento.

En la Fig.4.5 se muestra un elemento de resorte “e”, genérico. Puesto que este elemento tiene dos nodos por elemento, la numeración local de los nodos es la indicada. El orden en el cual se define los nodos es arbitrario.

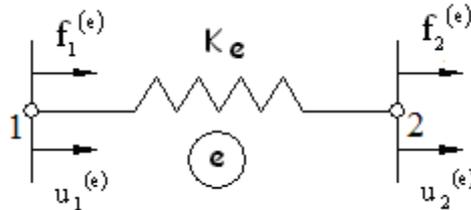


Fig.4.5 Elemento de resorte (e) genérico

donde:

$u_i^{(e)}$ ($i = 1,2$): representa el desplazamiento del nodo i del elemento (e).

$f_i^{(e)}$ ($i = 1,2$): representa la fuerza del nodo i en el elemento (e).

El elemento 1 de la estructura de la Fig.4.3 se muestra en la Fig.4.6.

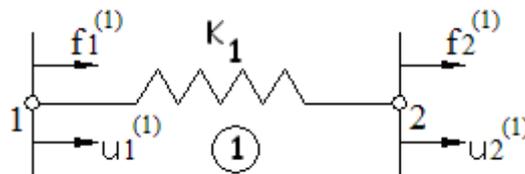


Fig.4.6 Elemento 1

Puesto que en cada nodo sólo hay un grado de libertad, la matriz local de rigidez asociada a este elemento es de 2×2 .

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.7)$$

En la Fig.4.7 se muestra el elemento 2 de la estructura anterior:

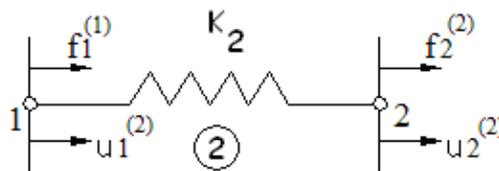


Fig.4.7 Elemento 2

De igual modo, la matriz de rigidez local del elemento 2, vendrá dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

4.5.- Ensamblaje de las matrices locales de rigidez

Antes de proceder a “ensamblar” las matrices locales de rigidez de los elementos, es importante correlacionar las numeraciones global y local de los nodos de la estructura que se está analizando. En la Fig.4.8a se muestra la numeración global de los nodos y en la Fig.4.8b, la numeración local de los mismos.

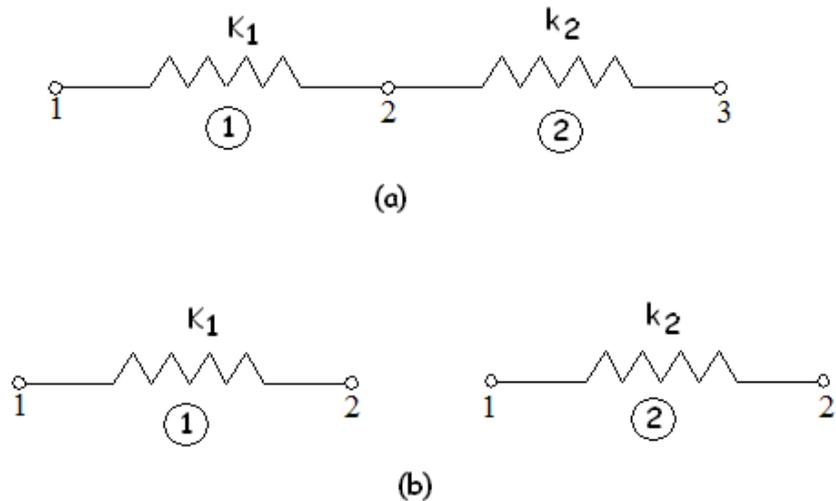


Fig.4.8. Numeraciones global (a) y local de los nodos (b)

La relación entre estas dos numeraciones se ilustra en la siguiente tabla.

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3

Con esta topología, el proceso de ensamblaje de las matrices locales es como sigue:

1.- Se dimensiona la matriz global de acuerdo con el número de ecuaciones a resolver en la estructura; en este caso es: 3 x 3 (número de nodos de la estructura x número de grados de libertad por nodo).

$$[K] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación, de acuerdo con la topología establecida, se van colocando en esta matriz los coeficientes de rigidez de cada uno de los elementos que conforman la estructura.

Para el elemento 1

Elemento 1	
Local	Global
$k_{11}^{(1)}$	K_{11}
$k_{12}^{(1)}$	K_{12}
$k_{21}^{(1)}$	K_{21}
$k_2^{(1)}$	K_{22}

Al finalizar esta etapa, la matriz global de la estructura queda:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2:

Elemento 2	
Local	Global
$k_{11}^{(2)}$	K_{22}
$k_{12}^{(2)}$	K_{23}
$k_{21}^{(2)}$	K_{32}
$k_2^{(2)}$	K_{33}

Una vez introducido los elementos de la matriz local de rigidez del elemento 2, la matriz global de la estructura queda:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

que, por supuesto es la misma matriz de rigidez de la estructura deducida anteriormente. Además:

$$\begin{array}{ll} u_1^{(1)} = u_1 & f_1^{(1)} = f_1 \\ u_2^{(1)} = u_1^{(2)} = u_2 & f_2^{(1)} = f_1^{(2)} = f_2 \\ u_2^{(2)} = u_3 & f_2^{(2)} = f_3 \end{array}$$

El sistema global de ecuaciones asociado a la estructura de resortes en estudio es:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & (k_1 + k_2) & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

4.6.- Procedimiento general del ensamblaje

A pesar que el procedimiento de ensamblado se presentó tomando como base un ejemplo muy simple, éste es completamente general y se aplica a cualquier sistema que sea analizado mediante el método de rigidez. En el ejemplo anterior se efectuó el ensamblado a mano, pero en un problema real de ingeniería, que envuelva cientos o miles de elementos (situación que se presenta muy fácilmente), el procedimiento deberá realizarse a través de un programa computacional. Omitiendo consideraciones especiales que mejoran la eficiencia computacional, el procedimiento general de ensamblaje se resume a continuación:

1. Se establece la matriz global de $n \times n$ y el vector global de cargas de $n \times 1$, ambos inicialmente nulos, donde n es el número de grados de libertad del sistema.
2. Empezando con el primer elemento, si los sistemas de referencia local y global de la estructura no coinciden, se transforman las ecuaciones del elemento desde el sistema local, al sistema global de referencia.

Nota: en el ejemplo de la estructura conformada por resortes que se viene estudiando este paso no aplica. Su justificación queda para el momento en que se estudien elementos cuyo dominio esté asociado a las coordenadas en dos direcciones.

3. Usando la topología del sistema, se insieren en la matriz y vector de cargas global, los términos correspondientes a la matriz de rigidez y al vector de cargas, respectivamente, y se efectúa la suma correspondiente, de acuerdo con la ec.(4.9)

4. Se vuelve al paso 2 y se repite el procedimiento para todos los elementos del sistema.

La generalidad de este proceso de ensamblaje en el método de rigidez ofrece una gran ventaja: una vez desarrollado un programa computacional que realice este proceso para una clase de problema en particular, puede usarse en la solución de cualquier otra clase de problemas.

4.7.- Características de la matriz ensamblada

Afortunadamente, en la mayoría de las aplicaciones de interés práctico, se obtienen sistemas de ecuaciones que debido a su naturaleza, pueden resolverse mediante técnicas que llevan en consideración las características “amigables” de dichos sistemas. En general, las matrices de rigidez, tanto locales como globales, son *simétricas* y en *banda*, como la matriz del sistema ecuaciones (4.9).

En la Fig.4.9 se muestra la forma general de una matriz de este tipo. Los elementos distintos de cero están dispuestos, únicamente, formando una “*banda*”, lo largo de la diagonal principal de la matriz, (área sombreada de la matriz $n \times n$). Por lo tanto el *ancho de banda* será igual $2LB - 1$, donde LB es el *semi-ancho de banda*.

Se puede economizar memoria computacional si se toma en consideración la simetría de la matriz global del sistema y el hecho que ésta sea una matriz en banda. En este caso, solamente es necesario almacenar los $n \times LB$ coeficientes de la matriz.

Cabe destacar que para sistemas extremadamente grandes, incluso este método de almacenamiento puede resultar inadecuado, siendo necesario la división de la matriz $n \times LB$ en bloques, lo cual requiere, desde el punto de vista computacional, de algoritmos numéricos muy sofisticados.

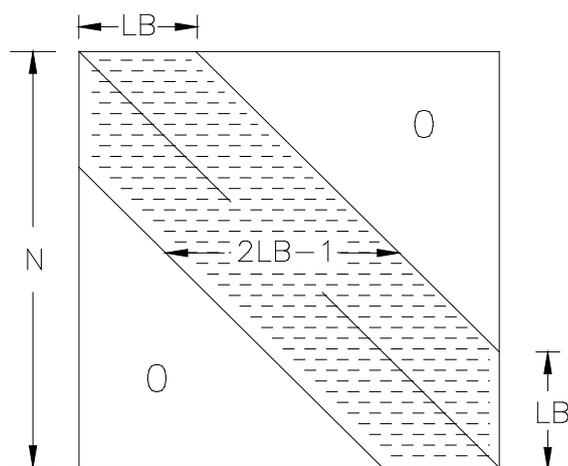


Fig.4.9 Representación esquemática de una matriz en banda

De lo anterior se infiere la importancia de determinar el semi-ancho de banda para un problema dado. Más aun, como se verá a continuación, el ancho de banda depende de la forma como se numeren los nodos de la malla.

Considérese, por ejemplo, las dos discretizaciones que se muestran en la Fig.4.10.

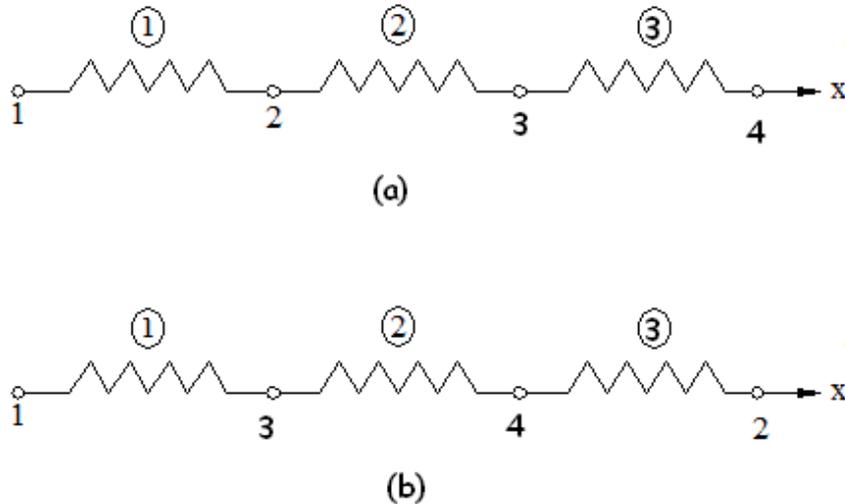


Fig.4.10 Diferentes numeraciones nodales de una misma discretización

En ambos casos se tienen tres elementos de dos nodos por elemento y un solo grado de libertad por nodo. Entonces, cada una de las tres matrices de este sistema es de 4 x 4. La topología de ambos sistemas es:

Caso (a)		
Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4

Caso (b)		
Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	3
2	1	3
	2	4
3	1	4
	2	2

Con esta topología, la matriz global para el caso (a) es:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} & 0 & 0 \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} & 0 \\ 0 & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} & k_{12}^{(3)} \\ 0 & 0 & k_{21}^{(3)} & k_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

cuyo semi-ancho de banda es igual a 2 (i.e., el máximo número de coeficientes distintos de cero a la izquierda o derecha de la diagonal principal es igual a 1).

La matriz global para el caso (b) es:

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & 0 & k_{12}^{(1)} & 0 \\ 0 & k_{22}^{(3)} & 0 & k_{21}^{(3)} \\ k_{21}^{(1)} & 0 & k_{22}^{(1)} + k_{11}^{(2)} & k_{12}^{(2)} \\ 0 & k_{12}^{(3)} & k_{21}^{(2)} & k_{22}^{(2)} + k_{11}^{(3)} \end{bmatrix}$$

cuyo semi-ancho de banda es 3. De donde se concluye que la numeración en el caso (a) es más eficiente que en el caso (b).

La forma de calcular el semi-ancho de banda es:

$$LB = (MDN + 1) \times NGLN \quad (4.10)$$

donde, MDN es la máxima diferencia nodal en un elemento cualquiera de la malla y NGLN es el número de grados de libertad por nodo. Así, para el caso (a), $LB = (1 + 1) \times 1 = 2$ y para el caso (b) $LB = (2 + 1) \times 1 = 3$.

Este sencillo ejemplo muestra la importancia de numerar los nodos de la estructura en una forma eficiente, puesto que su incidencia en el ancho de banda es directa, y este valor incide, a su vez, en la cantidad de memoria a utilizar en la solución de un problema dado, y el tiempo computacional utilizado en la solución del sistema de ecuaciones resultante. Las mismas implicaciones se derivan, por supuesto, en el caso que los elementos tengan más de un grado de libertad por nodo.

4.8.- Introducción de las condiciones de contorno

Como se mostró en el ejemplo anterior, la matriz de global de rigidez del sistema estructural es singular. En realidad, la matriz local de rigidez de cualquier elemento estructural es singular y, como consecuencia, la matriz global del sistema, también lo es. Para remover la singularidad de dicha matriz, se deben introducir las condiciones de contorno asociadas al problema a resolver. Existen tres formas de abordar esta cuestión. El siguiente ejemplo ilustrará como hacerlo.

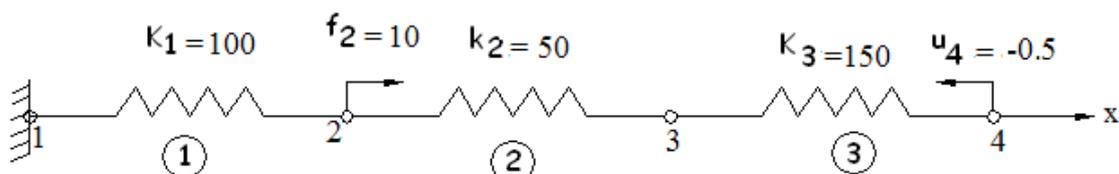


Fig. (a)

El sistema de ecuaciones de este problema es:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 150 & -50 & 0 \\ 0 & -50 & 200 & -150 \\ 0 & 0 & -150 & 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

4.8a.- Técnica de reordenamiento

La ecuación (a) puede reordenarse de tal modo que:

$$\begin{Bmatrix} \{f_p\} \\ \{f_s\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{pp}] & [k_{ps}] \\ [k_{sp}] & [k_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_p\} \\ \{u_s\} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

donde:

$\{f_p\}$: es el vector de cargas externas.

$\{f_s\}$: es el vector de las reacciones.

$\{u_p\}$: es el vector de los desplazamientos desconocidos.

$\{u_s\}$: es el vector de los desplazamientos conocidos.

La ecuación (b) puede escribirse:

$$\{f_p\} = [k_{pp}]\{u_p\} + [k_{ps}]\{u_s\} \quad (c.1)$$

$$\{f_s\} = [k_{sp}]\{u_p\} + [k_{ss}]\{u_s\} \quad (c.2)$$

Nota: Obsérvese que el número de cargas aplicadas y el número de desplazamientos desconocidos es siempre igual. Por lo tanto la sub matriz K_{pp} es siempre cuadrada.

De la ecuación (c.1) se puede obtener:

$$\{u_p\} = [k_{pp}]^{-1} \{ \{f_p\} - [k_{ps}]\{u_s\} \} \quad (d)$$

Una vez resuelto este sistema de ecuaciones; es decir, conocido el vector $\{u_p\}$, las reacciones podrán determinarse mediante la ec. (c.2).

En el problema propuesto, el reordenamiento conduce a:

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \\ f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -50 & -100 & 0 \\ -50 & 200 & 0 & -150 \\ -100 & 0 & 100 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

Luego,

$$\{f_p\} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

$$[k_{pp}] = \begin{bmatrix} 150 & -50 \\ -50 & 200 \end{bmatrix} \qquad [k_{ps}] = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix}$$

$$[k_{sp}] = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix} \qquad [k_{ss}] = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix}$$

$$\{u_p\} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \qquad \{u_s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

De la ecuación (d):

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -50 \\ -50 & 200 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} 10 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix} \right)$$

La solución de este sistema de ecuaciones conduce a:

$$u_2 = -0.063642$$

$$u_3 = -0.3909055$$

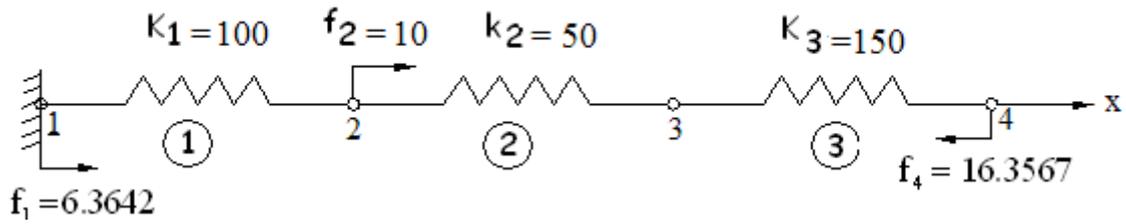
Las reacciones se determinan mediante la ec. (c.2); es decir:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -100 & 0 \\ 0 & -150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.063642 \\ -0.3909055 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

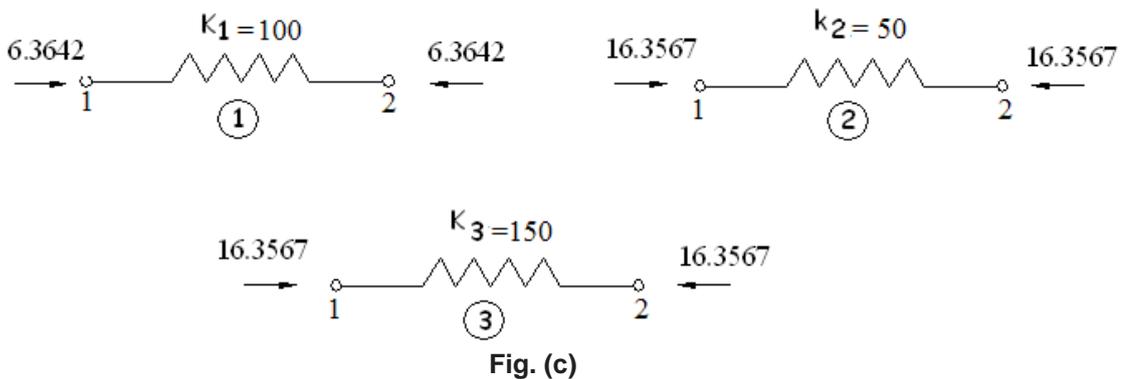
$$f_1 = 6.3642$$

$$f_4 = -16.3567$$

Los resultados se muestran, gráficamente en la Fig.(b).



En la Fig.(c) se muestra el resultado de la verificación del requisito de equilibrio estático en cada elemento:



Las fuerzas en los nodos de los nodos reciben el nombre de fuerzas de extremo de miembro. Una vez obtenidas estas fuerzas, se considera concluido el análisis de la estructura.

4.8b.- Técnica del número grande

En este método, el término de la diagonal de la matriz de rigidez del sistema, asociado con el desplazamiento nodal conocido, se multiplica por un número muy grande (por ejemplo: 10^{15}), mientras que el término correspondiente al vector de cargas, es reemplazado por el desplazamiento conocido, multiplicando por el mismo factor del término de la diagonal correspondiente. Efectivamente, este procedimiento hace que los términos no modificados de la matriz de rigidez sean muy pequeños comparados con los términos modificados.

Después de estas modificaciones, se procede a resolver el sistema completo de ecuaciones.

El siguiente ejemplo aclara el procedimiento. Sea el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

Supóngase que se conocen los desplazamientos $u_2 = \alpha_2$ y $u_4 = \alpha_4$. Luego, el método propone:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} \times 10^{15} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \times 10^{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ \alpha_2 \cdot k_{22} \times 10^{15} \\ f_3 \\ \alpha_4 \cdot k_{44} \times 10^{15} \end{Bmatrix}$$

Para mostrar la efectividad de este procedimiento, considérese la segunda ecuación de este conjunto:

$$k_{21}u_1 + k_{22} \times 10^{15}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 = \alpha_2 \times k_{22} \times 10^{15}$$

para propósitos prácticos, esta ecuación expresa que $u_2 = \alpha_2$, ya que $k_{22} \times 10^{15} \gg k_{ij}$ ($j=1,3,4$). En el problema de la estructura que se viene considerando, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{bmatrix} 100 \times 10^{15} & -100 & 0 & 0 \\ -100 & 150 & -50 & 0 \\ 0 & -50 & 200 & -150 \\ 0 & 0 & -150 & 150 \times 10^{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \cdot 100 \times 10^{15} \\ 10 \\ 0 \\ -0.5 \cdot 150 \times 10^{15} \end{Bmatrix}$$

La solución de este sistema conduce, por supuesto, a los mismos resultados obtenidos mediante el método de reordenamiento.

4.8c.- Técnica de ceros y unos

En este procedimiento, si i es el suscrito de un desplazamiento nodal conocido, la i -ésima fila y la i -ésima columna de la matriz de rigidez se hacen iguales a cero y k_{ii} se hace igual a la unidad. El término f_i se reemplaza por el valor conocido u_i . Cada uno de los $n-1$ términos restantes del vector f_i se modifica restando, de su respectivo valor, el valor del desplazamiento prescrito, multiplicado por el término correspondiente de la matriz de rigidez original.

De nuevo, sea el sistema:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix}$$

con $u_2 = \alpha_2$ y $u_4 = \alpha_4$. Con esta técnica, el sistema anterior se escribe:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & 0 & k_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ k_{31} & 0 & k_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 - k_{12}\alpha_2 - k_{14}\alpha_4 \\ \alpha_2 \\ f_3 - k_{32}\alpha_2 - k_{34}\alpha_4 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

En el problema estructural que se viene considerando, esta técnica conduce a:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 50 & 0 \\ 0 & -50 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 - (-100) \cdot 0 - 0 \cdot (-0.5) \\ 0 - 0 \cdot 0 - (-150) \cdot (-0.5) \\ -0.5 \end{Bmatrix}$$

cuya solución, claro está, conduce a los mismos resultados ya obtenidos.

Con relación a las técnicas expuestas, es importante resaltar lo siguiente:

1.- La técnica de reordenamiento es, computacionalmente hablando, muy costosa ya que del tiempo total de ejecución de un programa computacional que emplee este procedimiento, la mayor parte del mismo se consume en el reordenamiento de las ecuaciones.

Del mismo modo, la inversión de parte de la matriz de rigidez, como método de solución del sistema de ecuaciones, trae como consecuencia errores de redondeo que pueden afectar los resultados finales.

2.- Las dos últimas técnicas presentadas son equivalentes pero, aunque el procedimiento "del número muy grande", conlleva menos esfuerzo computacional, en cuanto a algoritmo se refiere, que la técnica de ceros y unos, este último procedimiento es la base de la mayoría de los programas computacionales disponibles. Ambos métodos preservan las propiedades (simetría, banda, etc.) de la matriz original del sistema.

En estas notas y en el programa computacional desarrollado se hace uso de la técnica de ceros y unos como método de solución del sistema global de ecuaciones.

V.- ELEMENTOS ESTRUCTURALES RETICULARES

5.1.- Introducción

En este capítulo se deducirán las matrices de locales de rigidez de diferentes elementos estructurales reticulares. Dicha deducción no requerirá otra cosa que los conocimientos básicos del álgebra matricial y de la mecánica de materiales. Este enfoque se conoce como el método directo; es decir, todos los coeficientes de rigidez de los elementos estructurales estudiados, se obtienen, en forma directa, con apenas los conocimientos ya mencionados. Hay por supuesto, otras formas de deducir dichas matrices: método variacionales a partir de los principios de energía, métodos de residuos pesados a partir de un enfoque netamente matemático, etc.

5.2.- Elemento: Uniforme Axial

Como una aplicación inmediata del resorte elástico – lineal discutido anteriormente, surge el elemento estructural unidimensional del eje recto, el cual se considera sometido únicamente a carga axial.

Sea el elemento axial, uniforme, de eje recto mostrado en la figura.

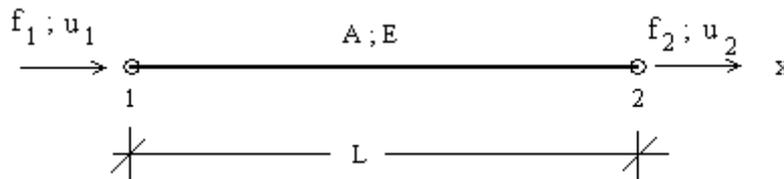


Fig.5.1 Elemento axial uniforme

donde:

A: es el área de la sección transversal del elemento.

E: es el módulo de elasticidad del material del elemento.

En total, este elemento tiene dos grados de libertad (2 nodos x 1 grado de libertad por nodo), por lo que se necesitan dos ecuaciones para describir las características fuerza – desplazamiento. En notación matricial estas ecuaciones tienen la forma:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

En la Fig.5.2 se muestra un elemento axial, uniforme, elástico-lineal, empotrado en un extremo y sometido a una carga axial F en su extremo libre. De la teoría básica de la mecánica de materiales, se sabe que el desplazamiento del extremo libre de dicho elemento viene dado por:



Fig.5.2 Deformación de un elemento axial sometido a carga axial

$$u = \frac{FL}{AE} \quad (5.2)$$

En la Fig.5.3a se muestra el elemento uniforme axial sometido a un desplazamiento unitario en el nodo 1, mientras se mantiene bloqueado el desplazamiento del nodo 2. De la propia definición de un coeficiente de rigidez k_{ij} ,

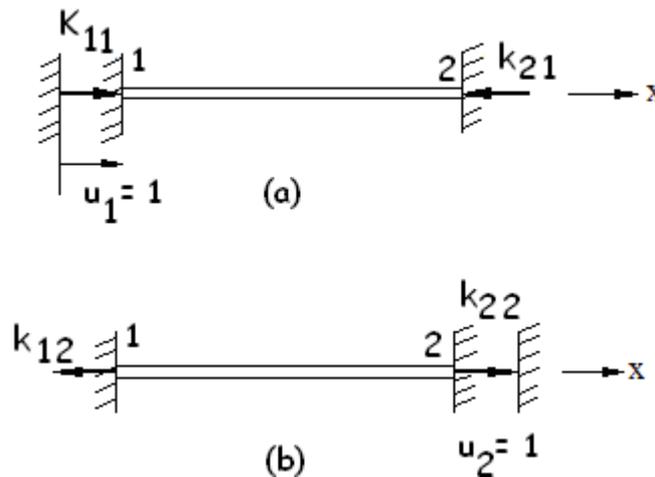


Fig.5.3 Coeficientes de rigidez asociados al elemento axial

Luego, de acuerdo con la ec.(5.2), se tiene

$$u_1 = 1.0 = \frac{k_{11}L}{AE} \Rightarrow k_{11} = \frac{AE}{L} \quad (5.3)$$

Recuérdese que k_{11} representa la fuerza en el nodo 1 debido al desplazamiento unitario en el nodo 1. El requisito de equilibrio estático del elemento requiere que:

$$k_{21} = -k_{11} \quad (5.4)$$

En la Fig.(5.3b) se muestra el elemento axial sometido a un desplazamiento unitario en el nodo 2, mientras se mantiene bloqueado el desplazamiento del nodo 1. De forma análoga:

$$u_2 = 1.0 = \frac{k_{22}L}{AE} \Rightarrow k_{22} = \frac{AE}{L} \quad (5.5)$$

De igual modo, el requisito de equilibrio estático establece que:

$$k_{12} = -k_{22} \quad (5.6)$$

Por lo tanto, la matriz de rigidez de este elemento es:

$$\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

Si se hace $k = \frac{AE}{L}$ este sistema de ecuaciones corresponde al sistema de ecuaciones del elemento de resorte estudiado en el capítulo anterior. Y es así, porque el resorte y el elemento axial uniforme elástico lineal son, en esencia, el mismo tipo de elemento.

5.2.1.- Ejemplo de elementos unidimensionales sometidos a carga axial

Considérese el sistema estructural mostrado en la Fig.e5.1a, el cual consta de un elemento de aluminio ($A_x = 5000 \text{ mm}^2$ y $E = 70 \text{ GPa}$) y una elemento de acero ($A_x = 800 \text{ mm}^2$ y $E = 200 \text{ GPa}$). La fuerza $F = 20 \text{ kN}$ está aplicada en la sección que une dichas barras.

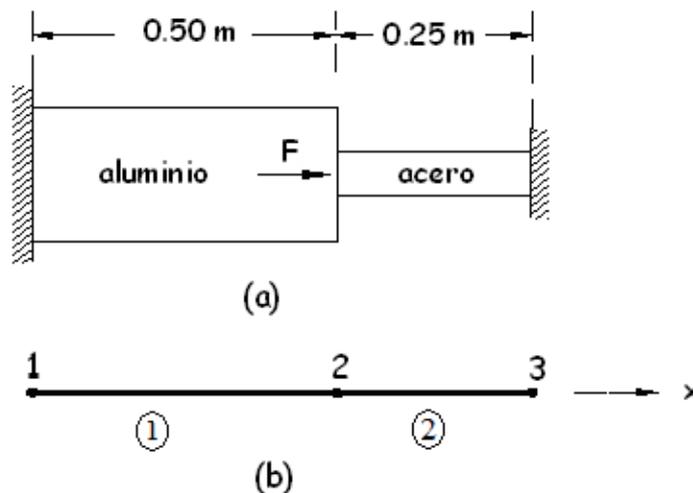


Fig.e5.1.1 Elementos unidimensionales sometidos a carga axial.

El objetivo de este problema consiste en determinar el desplazamiento y la fuerza del punto de unión de las dos barras mostradas.

La solución de cualquier problema estructural sigue los siguientes pasos:

a.- Discretización del dominio.

En la Fig.e5.1.1b, se muestra una discretización conveniente del dominio del problema dado, que considera tanto la localización de la carga externa, como la discontinuidad de la geometría y de las propiedades mecánicas presentes en el problema. Dicha discretización consta de dos elementos axiales, de dos nodos por elemento. La topología del sistema es:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez.

Como ya quedó establecido, la matriz local de rigidez de este tipo elemento viene dada por.

$$\frac{A_x E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

para este caso:

$$\left(\frac{A_x E}{L} \right)^{(1)} = \frac{5000 \times 70}{500} = 700.0 \text{ KN / m m}$$

$$\left(\frac{A_x E}{L} \right)^{(2)} = \frac{800 \times 200}{250} = 640.0 \text{ KN / m m}$$

luego, para el elemento 1 se tiene:

$$700.0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (b)$$

y para el elemento 2:

$$640.0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (c)$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales.

En este caso, el ensamblaje de las matrices locales de rigidez es directo, de modo que, de acuerdo con la topología del sistema, el ensamblaje de dichas ecuaciones en la matriz global del sistema conduce a:

$$\begin{bmatrix} 700.0 & -700.0 & 0.0 \\ -700.0 & (700.0 + 640.0) & -640.0 \\ 0.0 & -640.0 & 640.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 20.0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (d)$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno se introducirán mediante la técnica de ceros y unos descrita anteriormente. Así, el sistema anterior se transforma en:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1340.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 20.0 + 700.0 \times 0 + 640.0 \times 0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 20.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (e)$$

cuya solución es: $U_2 = 0.014925 \text{ m m.}$

e.- Cálculo de las fuerzas en los nodos de los elementos.

Una vez conocida U_2 , las fuerzas en los nodos de cada elemento se determinan a partir de las ec.(b) para el elemento 1:

$$700.0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.014925 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix}$$

De donde se obtiene: $f_1^{(1)} = -700.0 \times 0.014925 = -10.448 \text{ KN}$ y de la ec. (c) para el elemento 2:

$$640.0 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.014925 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix}$$

Cuyo resultado es: $f_1^{(2)} = 640.0 \times 0.014925 = -9.552 \text{ KN}$ y $f_2^{(2)} = 9.552 \text{ KN}$.

Las componentes del vector global de cargas viene dado por:

$$F_1 = f_1^{(1)} - 10.448 \text{ KN y } F_3 = f_2^{(2)} = -9.552 \text{ KN}$$

y es fácil verificar que:

$$F_2 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)} = 20 \text{ KN}$$

En la Fig.e1.2 se muestran las acciones de extremo de miembro correspondientes a los dos elementos.

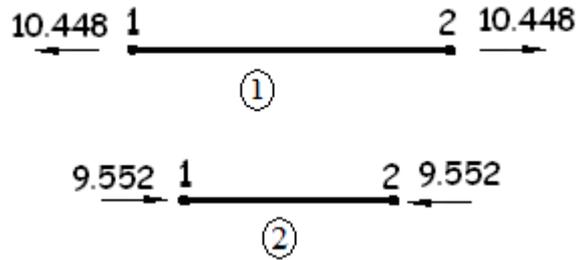


Fig.e12. Acciones de extremo de miembro de los elementos

5.2.2.- Vector de Cargas Nodales Equivalentes

Hasta el momento sólo se ha considerado que las cargas que actúan sobre una estructura, están aplicadas en los nodos de la misma. Obviamente, en una estructura, además de estas cargas, también existirán cargas aplicadas sobre los elementos de la misma. La consideración de este último tipo de cargas, involucra determinar lo que se da a llamar “vector de cargas nodales equivalentes”; es decir, las fuerzas que aplicadas sobre los nodos de la estructura, son estáticamente equivalentes a las cargas aplicadas sobre los elementos. Para el caso de un elemento axial uniforme el procedimiento se ilustra en el siguiente ejemplo.

En la Fig.5.4a se muestra la estructura ABC, la cual está discretizada en dos elementos (AB y BC), y el estado de carga asociado. Las cargas P_1 y P_3 actúan directamente en los nodos de la estructura, tal como se muestra en la Fig.5.4b, mientras que la carga $p(x)$, distribuida axialmente sobre el elemento AB, y la carga axial concentrada, P_2 , aplicada en algún punto intermedio del elemento BC, se ejercen sobre dichos elementos, tal como se puede observar en la Fig.5.4c.

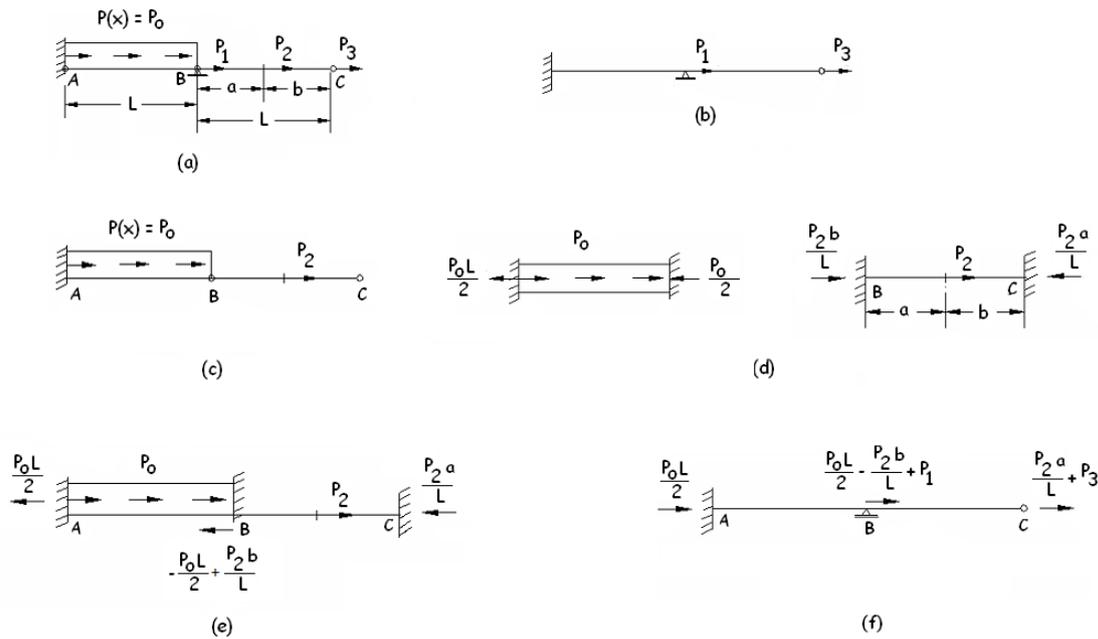


Fig.5.4. Formación del vector de cargas nodales equivalentes

Para efectuar la sustitución de éstas últimas por las respectivas cargas nodales equivalentes, se fijan los nodos de la estructura contra todos los desplazamientos posibles. Para la estructura mostrada, este procedimiento da como resultado dos elementos axiales doblemente empotrados, tal como se muestra en la Fig.5.4d.

Cuando estos elementos están sujetos a las cargas que actúan sobre los elementos, se produce un conjunto de acciones sobre los empotramientos, las cuales se pueden obtener siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para determinar los coeficientes de rigidez ya descrito en la sección 4.3 y, que para este caso particular, se muestran en la Fig.5.4d. Estas mismas acciones de empotramiento se muestran en la Fig.5.4e, donde se representan como acciones de empotramiento para la estructura fija. Invertiendo el sentido de estas acciones, se obtiene finalmente un conjunto de acciones que son estáticamente equivalentes a las cargas que actúan sobre los elementos. Este conjunto de acciones, al sumarse al conjunto de cargas que actúan sobre los nodos que se muestran en la Fig.5.4b, constituyen el conjunto de cargas combinadas que se muestra en la Fig.5.4f.

Como ya se mencionó, los desplazamientos de la estructura bajo la acción de las cargas combinadas, deben ser los mismos que los producidos por las cargas reales. Para observar que este requisito se satisfaga, considérese de nuevo la estructura anterior. Observando dicha figura, se nota que la superposición de las cargas combinadas mostradas en la Fig.5.4f y las acciones sobre la estructura fija que se observan en la Fig.5.4e, da las cargas reales sobre la estructura (Fig.5.4a). Se concluye entonces que la superposición de los desplazamientos de los nodos en la estructuras de la Fig.5.4e y de la Fig.5.4f, debe reproducir los desplazamientos de los nodos en la estructura real. Pero, como todos los desplazamientos de los nodos de la

estructura fija son cero, es evidente que los desplazamientos de los nodos en la estructura sujeta a las cargas reales, así como los de las cargas combinadas son iguales.

Adicionalmente, las reacciones en los apoyos de la estructura sujeta a las cargas combinadas, son las mismas que las reacciones causada por las cargas reales. Esta conclusión también puede verificarse por superposición de las acciones de las estructuras mostradas en la Fig.5.4e y en la Fig.5.4f. Todas las acciones de empotramiento en la Fig.5.4e se equilibran con las cargas nodales equivalentes iguales y opuestas que actúan sobre la estructura de la Fig.5.4f. Por lo tanto, las reacciones de la estructura con las cargas combinadas, son las mismas que para la estructura con las cargas reales (Fig.5.4a).

Las dos conclusiones presentadas se aplican a todos los tipos de estructuras reticulares. En contraste con estas conclusiones, las acciones en los nodos de los elementos causadas por las cargas nodales equivalentes que actúan sobre la estructura no son las mismas que las causadas por las cargas reales. En lugar de ello, las acciones en los nodos de los elementos debidas a las cargas reales, deben obtenerse sumando las acciones en los nodos del elemento de la estructura fija, a las causadas por las cargas combinadas. Por ejemplo, en el caso presentado, las acciones reales en los nodos de la estructura de la Fig.5.4a), se obtienen sobreponiendo las acciones en los nodos de los elementos de las estructuras de la Fig.5.4e y de la Fig5.4f.

5.3.- Elemento: Armaduras Planas

5.3.1.-Introducción

Se cree que fue el arquitecto italiano Andrea Palladio (1515 - 1580), quien analizó y construyó las primeras armaduras. Es probable que haya revivido antiguos diseños romanos y que las dimensiones de los miembros fueron de alguna manera empírica (tal vez también tomados de antiguas reglas romanas). Sus extensas notas sobre arquitectura incluyen descripciones detalladas y dibujos de armaduras de madera bastantes similares a los que se usan hoy en día.

5.3.2.-Hipótesis asumidas en el análisis de armaduras planas

Para simplificar el análisis de las armaduras se formulan las siguientes hipótesis:

1. Los elementos de las armaduras están conectados por medio de pasadores sin fricción.
2. Los elementos de la armadura son rectos (si no lo fuesen, las fuerzas axiales ocasionarían, en ellos, momentos flectores).
3. Las deformaciones de una armadura cargada, causadas por los cambios en la longitud de los elementos individuales, no son de suficiente magnitud para ocasionar cambios apreciables en la forma y en las dimensiones generales de la armadura.

4. Los elementos están dispuestos de manera que las cargas y las reacciones se aplican sólo en los nodos de las armaduras.

5.3.3.- Efecto de las hipótesis asumidas

Las hipótesis formuladas en la sección anterior definen una armadura ideal; es decir una armadura con elementos bastante esbeltos que están unidos entre sí por pasadores sin rozamiento, y con cargas externas que están aplicadas, únicamente, en los nodos de la armadura. En la práctica, sin embargo, proveer articulaciones sin rozamiento no es tarea fácil, y en lugar de esto se construyen uniones rígidas con pernos, soldaduras y remaches, lo que da origen a lo se podría llamar, una armadura real.

La diferencia entre una armadura ideal y una armadura real es que los elementos de la armadura real, están sometidos a fuerzas cortantes y momentos flectores adicionalmente, a las fuerzas axiales de una armadura real. Esta diferencia tiende a disminuir cuando sus elementos se hacen más y más flexibles; es decir la relación I/L más pequeñas.

Aunque el método de análisis presentado en este capítulo está restringido a armaduras ideales, su uso en armaduras reales da resultados satisfactorios para fines prácticos. Si se consideran uniones rígidas en lugar de articulaciones sin rozamiento, una armadura plana siempre podrá ser tratada como un pórtico plano. Un análisis estructural de este tipo dará como resultado las llamadas "fuerzas secundarias" en los elementos (fuerzas cortantes y momentos flectores), así como las "fuerzas primarias" (fuerzas axiales), teniendo en cuenta la rigidez a la flexión de los elementos.

5.3.4.- Transformación de coordenadas

Salvo en los elementos uniformes axiales y vigas de eje recto, en el análisis estructural, se deben considerar dos sistemas de coordenados de referencia. Uno global, respecto del cual está referida la estructura, y otro local respecto del cual está referido cada elemento que conforma la misma. En general, los dos sistemas coordenados no coinciden.

En la Fig.5.5a se muestra una armadura plana asociada al sistema coordenado global de referencia X-Y. En la Fig5.5b se muestra en elemento genérico (e) asociado a su respectivo eje local de referencia x-y, en donde la ordenada x está situada en la dirección del eje longitudinal del elemento.

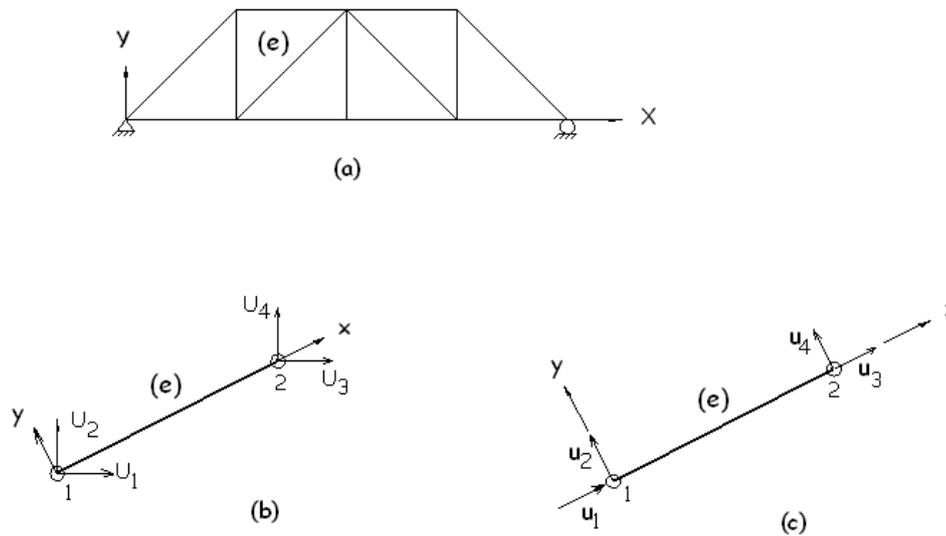


Fig.5.5 Armadura plana; (a) sistema global de referencia de la armadura; (b) (desplazamientos globales; (c) desplazamientos locales

Cada nodo de la armadura plana tendrá dos grados de libertad; es decir, se podrá desplazar en las direcciones X y Y. En la Fig.5.5b se muestran los desplazamientos de los nodos del elemento (e), U_i ($i=1,2,3,4$), los cuales están asociados al sistema global X-Y. Por estar asociados al sistema global de referencia, estos desplazamientos reciben el nombre de “desplazamientos globales”. En la Fig.5.5c se muestran los desplazamientos de los mismos nodos u_i ($i=1,2,3,4$), los cuales están referidos al sistema local x-y. Por esta razón, estos desplazamientos reciben el nombre de “desplazamientos locales”.

La deducción de las matrices de rigidez asociadas al sistema local de referencia se realiza de un modo muy simple. Sin embargo, es mucho más eficiente disponer los desplazamientos nodales de la estructura asociados al sistema global de referencia. Por tal motivo, antes de ensamblar las matrices locales de rigidez de los elementos en la matriz global de la estructura, se debe establecer la forma de transformar los desplazamientos, las fuerzas y las matrices de locales de rigidez desde el sistema local al sistema global de referencia. Para ello será necesario recordar los aspectos relacionados con la transformación de coordenadas.

5.3.4.a.- Transformación de vectores en dos dimensiones

En la Fig.5.6 se muestra un vector \mathbf{d} que representa el desplazamiento de un nodo cualquiera de una armadura plana dada. Sea x-y un sistema global de referencia y $\hat{x}-\hat{y}$ un sistema local de referencia. Los dos sistemas están rotados un ángulo θ ; este ángulo se considerará positivo cuando sea medido desde en sentido anti-horario desde x a \hat{x} .

El problema consiste en relacionar las componentes del desplazamiento global de este vector, con las componentes del desplazamiento local. Al realizar esta relación se generará una matriz de transformación (o de rotación),

la cual será utilizada, posteriormente, para obtener la matriz global de rigidez de un elemento, a partir de su respectiva matriz local de rigidez.

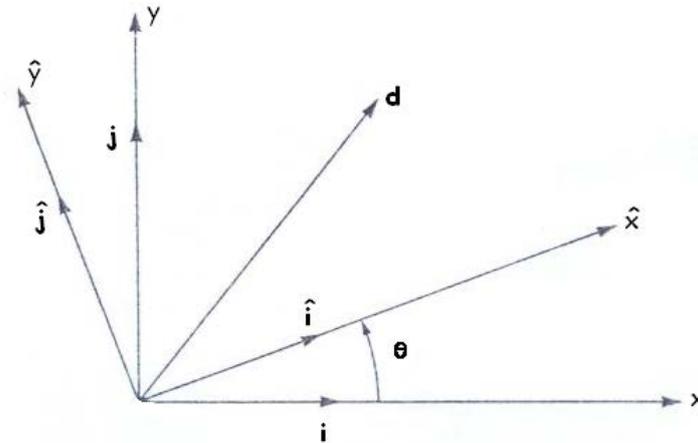


Fig.5.6 Vector de desplazamiento general

El vector de desplazamiento \mathbf{d} se puede expresar en ambos sistemas de referencia como:

$$\mathbf{d} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} = \hat{d}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{d}_y \hat{\mathbf{j}} \quad (5.8)$$

donde \mathbf{i} y \mathbf{j} son los vectores unitarios en las direcciones x - y , e $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$ son los vectores unitarios en las direcciones \hat{x} - \hat{y} . En la Fig.5.7 se muestra la relación entre los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} con los vectores unitarios $\hat{\mathbf{i}}$ y $\hat{\mathbf{j}}$. En esta Figura se puede observar que:

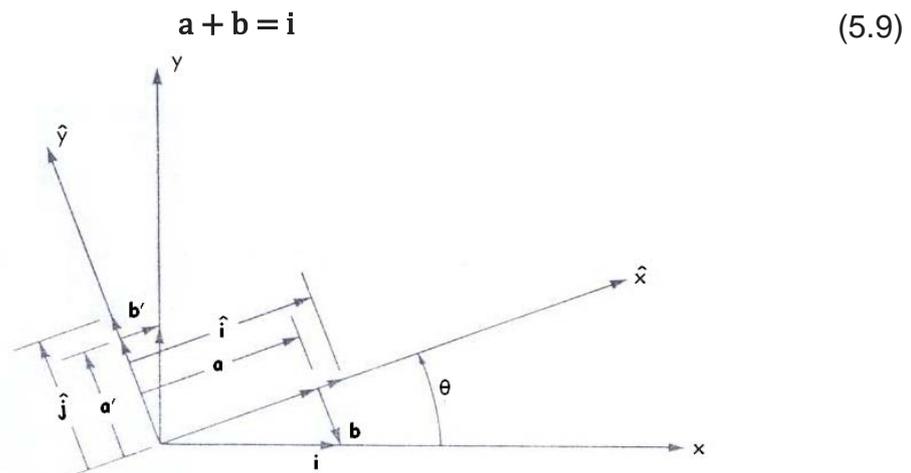


Fig.5.7 Relación entre los vectores unitarios locales y globales

También, utilizando la ley de cosenos, se tiene:

$$|a| = |i| \cos(\theta) \quad (5.10)$$

Y debido a que \mathbf{i} es, por definición, un vector unitario, su magnitud viene dada por:

$$|\mathbf{i}|=1 \quad (5.11)$$

por lo tanto, se obtiene:

$$|\mathbf{a}| = 1 \cos(\theta) \quad (5.12a)$$

de igual modo:

$$|\mathbf{b}| = 1 \operatorname{sen}(\theta) \quad (5.12b)$$

Ahora \mathbf{a} , está en la dirección de $\hat{\mathbf{i}}$ y \mathbf{b} en la dirección de $-\hat{\mathbf{j}}$. Por lo tanto:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{i}} = \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} \quad (5.14a)$$

Y

$$\mathbf{b} = |\mathbf{b}| (-\hat{\mathbf{j}}) = (\operatorname{sen}(\theta)) (-\hat{\mathbf{j}}) \quad (5.14b)$$

Sustituyendo las ec.(5.14) en la ec.(5.9), obtiene:

$$\mathbf{i} = \cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen}(\theta)(-\hat{\mathbf{j}}) \quad (5.15)$$

De igual modo, de la Fig.5.6 se infiere:

$$\mathbf{a}' + \mathbf{b}' = \mathbf{j} \quad (5.16)$$

$$\mathbf{a}' = \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}} \quad (5.17a)$$

$$\mathbf{b}' = \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{i}} \quad (5.17b)$$

La sustitución de las ecs.(5.17) en la ec.(5.16), permite obtener:

$$\mathbf{j} = \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}} \quad (5.18)$$

y, sustituyendo la ec.(3.15) y la ec.(3.18) en la ec.(5.8), se obtiene:

$$d_x (\cos(\theta) \hat{\mathbf{i}} - \operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{j}}) + d_y (\operatorname{sen}(\theta) \hat{\mathbf{i}} + \cos(\theta) \hat{\mathbf{j}}) = \hat{d}_x \hat{\mathbf{i}} + \hat{d}_y \hat{\mathbf{j}} \quad (5.19)$$

De donde se infiere que:

$$d_x \cos(\theta) + d_y \operatorname{sen}(\theta) = \hat{d}_x \quad (5.20)$$

$$-d_x \operatorname{sen}(\theta) + d_y \cos(\theta) = \hat{d}_y$$

Este sistema, en forma matricial, se escribe:

$$\begin{Bmatrix} \hat{d}_x \\ \hat{d}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

En forma compacta esta ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\{\hat{d}\} = [R]\{d\} \quad (5.22)$$

donde,

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

es la matriz que relaciona los desplazamientos globales $\{d\}$ con los desplazamientos locales $\{\hat{d}\}$ y se denomina “matriz de rotación”. Esta matriz se utilizará para transformar los desplazamientos y fuerzas nodales desde el sistema local de referencia del elemento, al sistema global de referencia de la armadura plana.

5.3.5.- Matriz local de rigidez de un elemento de armadura plana

En esencia, un elemento de armadura plana es similar a un elemento uniforme axial, solo que ahora se tendrá, en vez de un grado de libertad por nodo, dos grados de libertad, para incluir los desplazamientos u_2 y u_4 , en la ecuación matricial fuerza – desplazamiento, se debe expandir la matriz de rigidez del elemento uniforme axial, de dos grados de libertad, a cuatro grados de libertad (2 nodos x 2 grados de libertad). Es decir, la matriz de rigidez local del elemento de armadura plana es de 4 x 4, y viene dada por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

donde: $f_2 = f_4 = 0$. En forma compacta esta ecuación se puede escribir como:

$$\{f\} = [k]\{u\} \quad (5.25)$$

donde:

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

Es la matriz local de rigidez de un elemento de armadura plana.

5.3.6.- Matriz global de rigidez de un elemento de armadura plana

Antes de ensamblar las matrices locales de rigidez, es necesario expresarlas en términos de las coordenadas globales de la estructura. Esta transformación, de acuerdo con la ec.(5.22), tiene la forma:

$$\{u\} = [R]\{U\} \quad (5.27)$$

donde $\{u\}$ es el vector de los desplazamientos nodales locales, $\{U\}$ es el vector de los desplazamientos nodales globales, $[R]$ es la matriz de rotación y θ es el ángulo entre el sistema local y el sistema global de referencia. En forma expandida, la ecuación anterior se escribe:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

es decir, la matriz de rotación $[R]$ para una armadura plana viene dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Nótese que, la longitud del vector desplazamiento debe ser igual en ambos sistemas coordenados; es decir:

$$u_1^2 + u_2^2 = U_1^2 + U_2^2 \quad (5.30a)$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} \quad (5.30b)$$

La ecuación anterior puede escribirse del siguiente modo:

$$\{u\}^T \{u\} = \{U\}^T \{U\} \quad (5.31)$$

pre-multiplicando la ec. (5.27) por $[\mathbf{R}]^{-1}$, se obtiene:

$$\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{R}]^{-1} \{\mathbf{u}\} \quad (5.32)$$

además, del álgebra matricial se sabe que:

$$\{\mathbf{u}\}^T = [\mathbf{U}]^T [\mathbf{R}]^T \quad (5.33)$$

Sustituyendo las ecs. (5.32) y (5.33) en la ec. (5.31), se tiene:

$$[\mathbf{U}]^T [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{u}\} = [\mathbf{U}]^T [\mathbf{R}]^{-1} \{\mathbf{u}\} \quad (5.34)$$

y, por lo tanto:

$$[\mathbf{R}]^T = [\mathbf{R}]^{-1} \quad (5.35)$$

La ecuación (5.35) expresa el hecho que la matriz de rotación (transformación de coordenadas) es ortogonal; es decir la inversa de dicha matriz es igual a su transpuesta.

Del mismo modo, la relación de las fuerzas nodales entre los dos sistemas de referencia, viene dada por:

$$\{\mathbf{f}\} = [\mathbf{R}]\{\mathbf{F}\} \quad (5.36)$$

donde $\{\mathbf{f}\}$ representa el vector de cargas nodales asociado al sistema local de referencia y $\{\mathbf{F}\}$ es vector de cargas nodales asociado al sistema global de referencia.

Sustituyendo las ecs. (5.27) y (5.36) en la ec. (5.25) se obtiene:

$$[\mathbf{R}]\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{k}][\mathbf{R}]\{\mathbf{U}\} \quad (5.37)$$

Pre-multiplicando esta ecuación por $[\mathbf{R}]^{-1}$, se obtiene:

$$[\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{R}]\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{R}]^{-1} [\mathbf{k}][\mathbf{R}]\{\mathbf{U}\} \quad (5.38)$$

y, de acuerdo con la ec.(5.35)

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{k}][\mathbf{R}]\{\mathbf{U}\} \quad (5.39)$$

Esta ecuación puede escribirse de la siguiente forma:

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} \quad (5.40)$$

donde,

$$[K] = [R]^T [k][R] \quad (5.41)$$

es la matriz local de rigidez con respecto al sistema global de referencia seleccionado.

Luego, la matriz de rigidez local de un elemento de armadura plana, con respecto al sistema global de referencia viene dado, de acuerdo a la ec. (5.24), por:

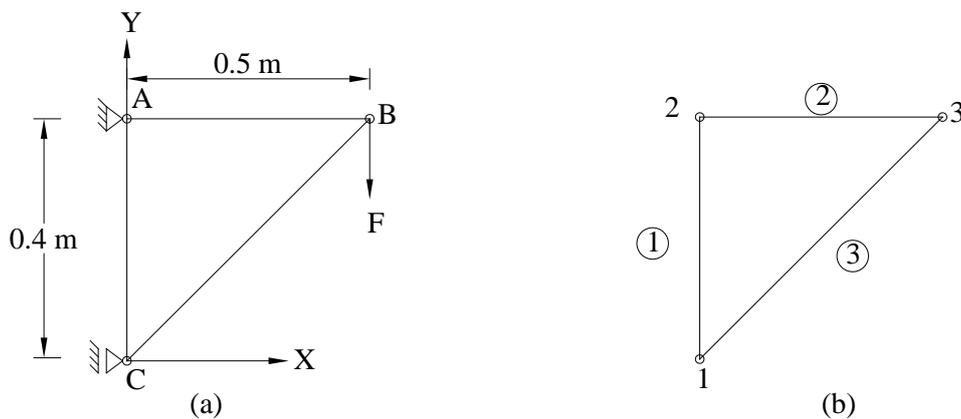
$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^x \quad (5.42)$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

5.3.7.- Ejemplo de una armadura plana sometida a un estado de cargas

Considérese la armadura plana mostrada en la Figura (a). Los elementos AB y BC son de aluminio ($E = 70 \text{ GPa}$), y el área de la sección transversal de ambos es:

$A = 400 \text{ mm}^2$. El elemento BC es de acero ($E = 200 \text{ GPa}$), y el área de su sección transversal es: $A = 200 \text{ mm}^2$. Se desea determinar los desplazamientos de los nodos 1 y 3 y las fuerzas de extremo de miembro. Sea $F = 1.0 \text{ KN}$.



a.- Discretización del dominio

En la Figura (b) se muestra la numeración nodal global de los tres elementos de armadura plana que conforman la estructura en estudio. De acuerdo con esta numeración, las incidencias son:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	1
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez

En general, la matriz de rigidez local de un elemento de armadura plana viene dada:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

Elemento 1:

$$\frac{AE}{L} = \frac{400 \times 70}{400} = 70.0 \text{ KN/mm}$$

Elemento 2:

$$\frac{AE}{L} = \frac{400 \times 70}{500} = 56.0 \text{ KN/mm}$$

Elemento 3:

$$\frac{AE}{L} = \frac{200 \times 200}{640} = 62.5 \text{ KN/mm}$$

luego:

$${}^{(1)}[k] = 70.0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{(2)}[k] = 56.0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{(3)}[k] = 62.5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c.- Ensamblaje de las matrices locales

Puesto que en este ejemplo, los sistemas de referencia locales y globales de los elementos 1 y 3 no coinciden, antes de proceder al ensamble de las matrices locales de rigidez, se hace necesario, transformar ${}^{(1)}[k]$ y ${}^{(3)}[k]$ al sistema global de referencia. Como ya se estableció, la matriz de rotación $[R]$ para el elemento de armadura plana, viene dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \text{sen} \theta \\ 0 & 0 & -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

En realidad, para el elemento 2 no es necesario efectuar la transformación mencionada. Sin embargo, con el objetivo de mostrar la secuencia de un programa computacional, se efectuarán los cálculos sobre los tres elementos, tal como lo realizaría dicho programa. Entonces, para el

Elemento 1

$${}^{(1)}[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 2

$${}^{(2)}[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 3

$${}^{(3)}[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.625 & 0 & 0 \\ -0.625 & 0.781 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.781 & 0.625 \\ 0 & 0 & -0.625 & 0.781 \end{bmatrix}$$

Luego, las matrices de rigidez locales, asociadas al sistema global de referencia, vendrán dadas por:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{k}] [\mathbf{R}]$$

Efectuando la multiplicación de matrices indicada en la ecuación anterior, se tendrá:

$${}^{(1)}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 70.0 & 0.0 & -70.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -70.0 & 0.0 & 70.0 \end{bmatrix}$$
$${}^{(2)}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 56.0 & 0.0 & -56.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -56.0 & 0.0 & 56.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{(3)}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 38.1 & 30.5 & -38.1 & -30.5 \\ 30.5 & 24.4 & -30.5 & -24.4 \\ -38.1 & -30.5 & 38.1 & 30.5 \\ -30.5 & -24.4 & 30.5 & 24.4 \end{bmatrix}$$

El ensamblaje de estas matrices viene dado por:

$$[\mathbf{K}] = \sum_{e=1}^E \mathbf{K}_e$$

donde E es el número de elementos (e) de la armadura (E = 3). Luego, para este caso:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 38.1 & 30.5 & 0.0 & 0.0 & -38.1 & -30.5 \\ & 94.4 & 0.0 & -70.0 & -30.5 & -24.4 \\ & & 56.0 & 0.0 & -56.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & 70.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 94.1 & 30.5 \\ & & & & & 24.4 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ -1.0 \end{Bmatrix}$$

d.- Introducción de las condiciones de contorno

Al introducir las condiciones de contorno, este sistema queda de la siguiente manera:

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 94.4 & 0.0 & 0.0 & -30.5 & -24.4 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -30.5 & 0.0 & 0.0 & 94.1 & 30.5 \\ 0.0 & -24.4 & 0.0 & 0.0 & 30.5 & 24.4 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 - 30.5 \times 0.0 - 0.0 \times 0.0 + 70.0 \times 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 + 38.1 \times 0.0 + 56.0 \times 0.0 - 0.0 \times 0.0 \\ -1.0 + 30.5 \times 0.0 - 0.0 \times 0.0 - 0.0 \times 0.0 \end{Bmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones conduce a:

$$U_1 = U_3 = U_4 = 0.0; \quad U_2 = -0.014286 \text{ mm}$$

$$U_5 = 0.022321 \text{ mm}; \quad U_6 = -0.083208 \text{ mm}$$

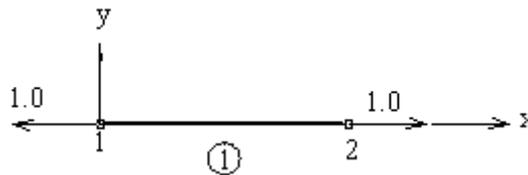
e.- Cálculo de las acciones de extremo de miembro (fuerzas en los nodos de los elementos)

Puesto que $\{u\} = [R]\{U\}$ y $\{f\} = [k]\{u\}$, entonces el vector de acciones de extremo de miembro vendrá dado por:

$$\{f\} = [k][R]\{U\}$$

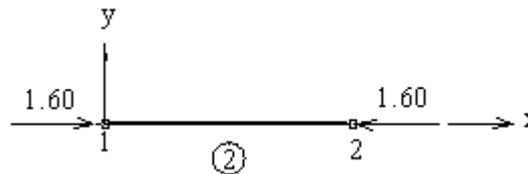
Luego, para el elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 70.0 & 0.0 & -70.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -70.0 & 0.0 & 70.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -0.014286 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$



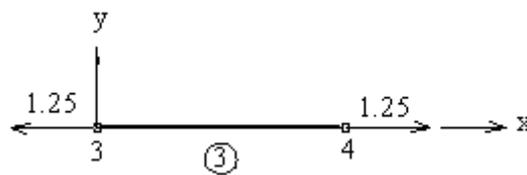
Elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 56.0 & 0.0 & -56.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -56.0 & 0.0 & 56.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.25 \\ 0.0 \\ 1.25 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$



Elemento 3:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.5 & 0.0 & -62.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -62.5 & 0.0 & 62.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.781 & 0.625 & 0.0 & 0.0 \\ -0.625 & 0.781 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.781 & 0.625 \\ 0.0 & 0.0 & -0.625 & 10.781 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ -0.014286 \\ 0.022321 \\ -0.083208 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.60 \\ 0.0 \\ -1.60 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$



Una vez obtenidas las acciones de extremo de miembro, sólo resta el cálculo de las reacciones.

5.4.- Elementos: Viga de Eje Recto

5.4.1.- Introducción

En esta sección se deducirá la matriz local de rigidez de un elemento de viga de eje recto y, también la respectiva matriz global de rigidez. Las vigas son los elementos que aparecen más frecuentemente en una estructura; edificios, puentes, torres, etc., dan fe de ello. Las vigas que se analizarán serán de eje recto y uniformes (sección transversal constante). En los casos donde hay cambios en las secciones transversales entre dos puntos de apoyo, de tal forma que el elemento consista de dos o más segmentos prismáticos, siempre será posible analizar la viga considerando que existe un nodo en el cambio de sección.

5.4.2.- Elemento de viga de eje recto

En la Fig.5.8a se muestra una viga cargada y el respectivo sistema global de referencia. En la Fig.5.8b se muestra un elemento genérico (e) de viga de eje recto, uniforme, el cual se supondrá homogéneo, y el sistema local de referencia asociado.

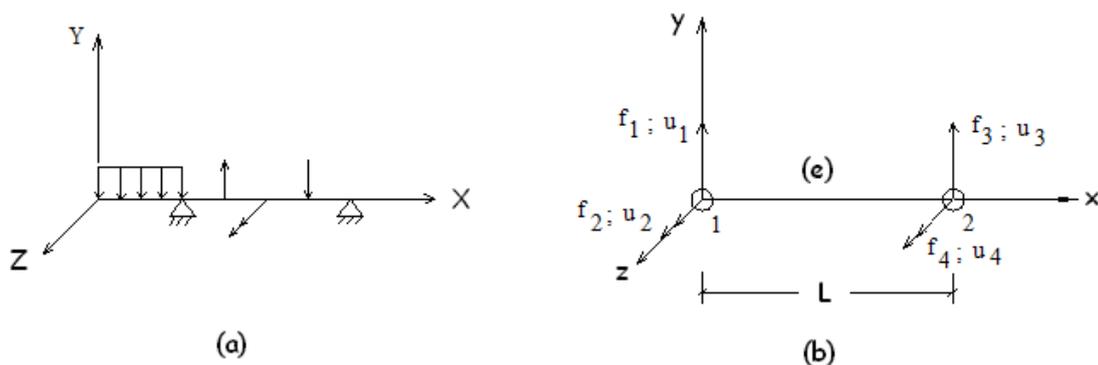


Fig.5.8. Viga de eje recto; (a) viga en el sistema global de referencia; (b) elemento asociado al sistema local de referencia

En cada nodo de este elemento existirán dos grados de libertad; un desplazamiento en la dirección vertical y una rotación con relación al eje z. Nótese el orden de la numeración de los grados de libertad; 1 para la traslación, 2 para la rotación en el nodo 1, y 3 para la traslación y 4 para la rotación en el nodo 2.

De nuevo, haciendo uso de la definición del coeficiente de rigidez k_{ij} y la teoría básica de la mecánica de materiales, se procederá a determinar los coeficientes de rigidez, de la matriz local de rigidez, de este elemento, con relación al sistema local de referencia. En la Fig.5.9 se muestran los coeficientes a determinar; 16 en total ya que la matriz de rigidez es de 4 x 4 (2 nodos/elem. x 2 grados de libertad por nodo). Debido a la indeterminación estática presente en este problema, se considerarán como redundantes, la fuerza y el momento flector en un extremo del elemento.

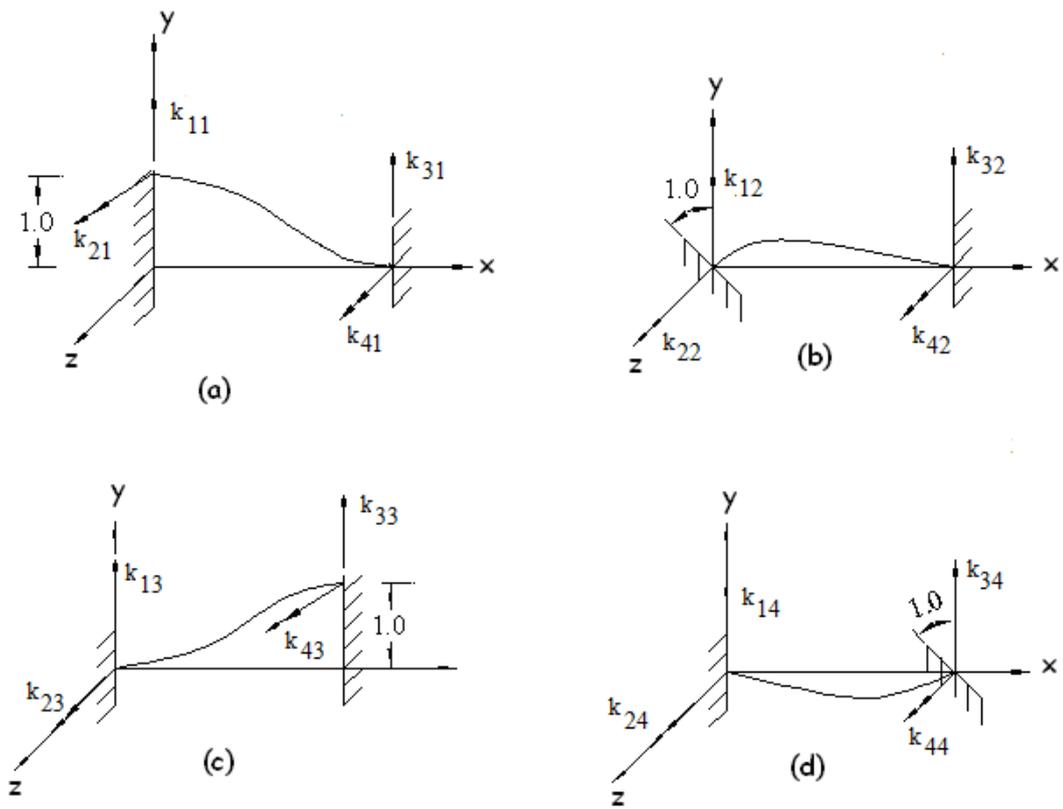
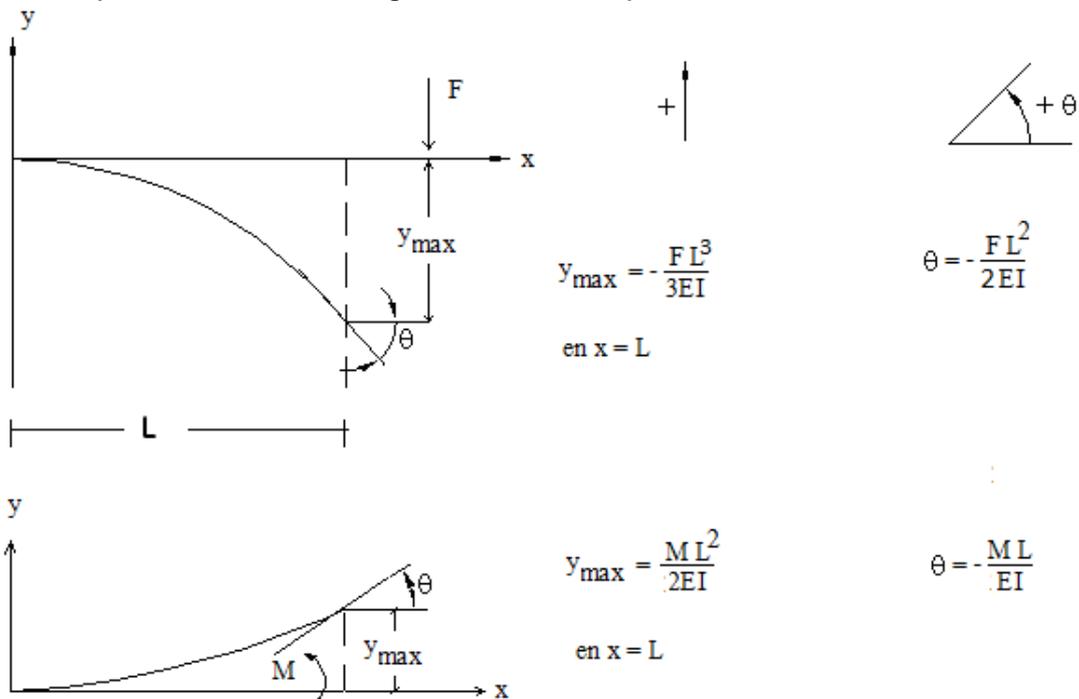


Fig.5.9. Coeficientes de rigidez de un elemento de viga de eje recto

Así, para el caso de la Fig.5.9a, se tiene que:



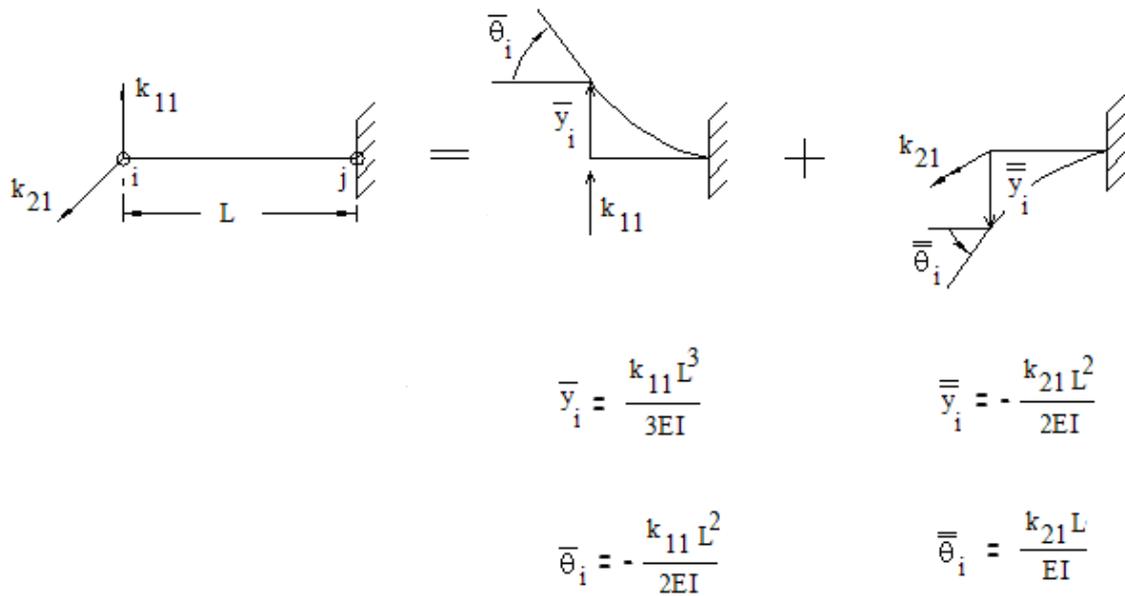


Fig.5.10. Deflexiones y rotaciones para el cálculo de los coeficientes de rigidez asociados a la Fig.5.9a

Las ecuaciones de compatibilidad son:

$$\theta_i = \bar{\theta}_i + \bar{\theta}_i = 0 \qquad (5.42a)$$

$$y_i = \bar{y}_i + \bar{y}_i = 1 \qquad (5.42b)$$

luego, de la ec.(5.42a), se tiene :

$$-\frac{k_{11}L^2}{2EI} - \frac{k_{21}L}{EI} = 0 \Rightarrow k_{11} = \frac{2k_{21}}{L} \qquad (5.43a)$$

la ec.(5.42b):

$$\frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1 \Rightarrow \frac{2k_{21}}{L} \left(\frac{L^3}{3EI} \right) - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1 \qquad (5.43b)$$

de esta ecuación se obtiene:

$$k_{21} = \frac{6EI}{L^2} \qquad (5.44a)$$

Sustituyendo el valor de este coeficiente de rigidez en la ec.(5.43a), se determina el valor de k_{11} :

$$k_{11} = \frac{12EI}{L^3} \qquad (5.44b)$$

Siguiendo un procedimiento análogo, en el caso de la Fig.5.9b, se determinan los coeficientes de rigidez:

$$k_{12} = \frac{6EI}{L^2} \qquad k_{22} = \frac{4EI}{L} \qquad (5.44c)$$

De igual modo, para el caso de la Fig.5.9c, se obtienen:

$$k_{13} = -\frac{6EI}{L^2} \qquad k_{33} = \frac{12EI}{L^3} \qquad (5.44d)$$

y, finalmente, para el caso de la Fig.5.9d, se determinan los coeficientes de rigidez:

$$k_{34} = -\frac{6EI}{L^2} \qquad k_{44} = \frac{4EI}{L} \qquad (5.44e)$$

Los restantes coeficientes de rigidez se calculan mediante los requisitos de equilibrio estático: $\sum F_y = 0$ y $\sum M_z = 0$. Así, la matriz local de rigidez del elemento de viga de eje recto queda completamente determinada. La relación entre las acciones en los extremos del elemento y los “desplazamientos”, viene dada, en forma matricial ya conocida:

$$\{f\} = [k]\{u\}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \text{Simétrica} & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \qquad (5.45)$$

donde, en el nodo 1:

f_1 = Fuerza en la dirección y.

f_2 = Momento flector alrededor del eje z.

u_1 = Desplazamiento en la dirección y.

u_2 = Rotación alrededor de z.

y, en el nodo 2:

f_3 = Fuerza en la dirección y.

f_4 = Momento flector alrededor del eje z.

u_3 = Desplazamiento en la dirección y.

u_4 = Rotación alrededor de z.

Nótese que no se requiere la transformación de esta matriz local de rigidez al sistema global de referencia, ya que, al igual que el elemento axial, los sistemas de referencia local y global, coinciden.

5.4.3- Vector de cargas nodales equivalentes para elementos de viga de eje recto

De igual modo que en el caso de los elementos axial uniformes, cuando las cargas actúan directamente sobre los elementos de una viga, se necesita formar el respectivo vector de Vargas nodales equivalentes. El procedimiento en ambos casos es similar. Para el caso de vigas de eje recto, dicho procedimiento se resume con el ejemplo mostrado en la Fig.5.11.

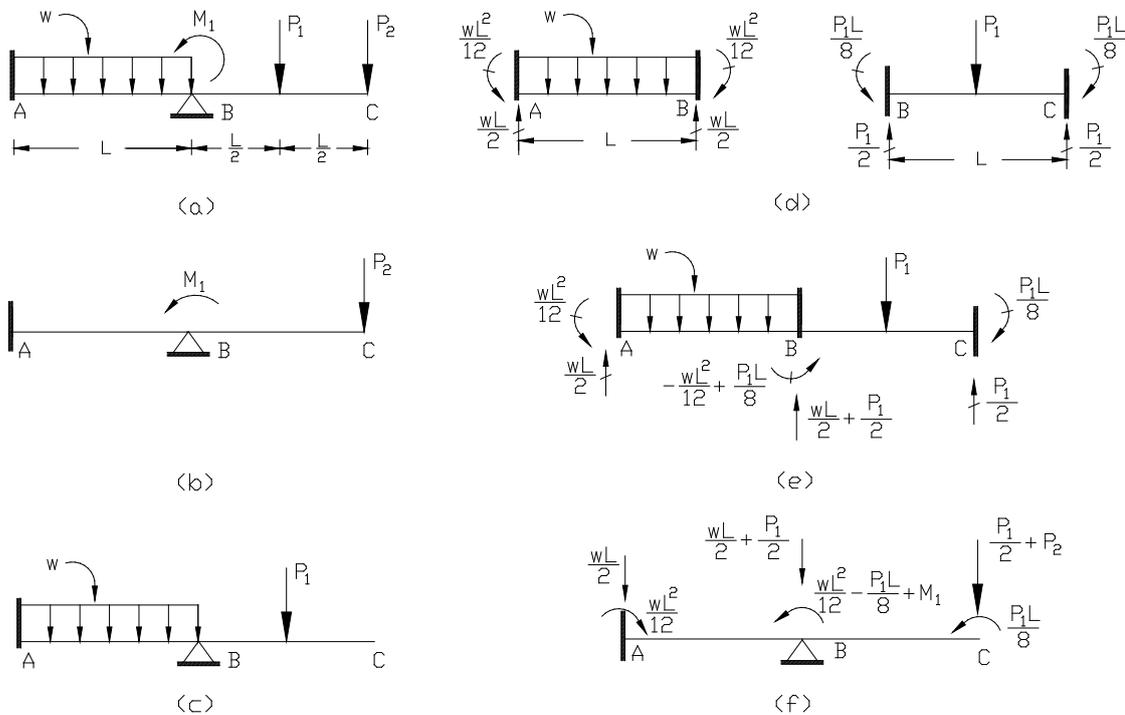


Fig.5.11 Cargas sobre los elementos y los nodos y vector de cargas nodales equivalentes

La Fig.5.11a muestra una viga ABC apoyada en los nodos A y B y sujeta a varias cargas. Algunas de éstas actúan directamente sobre los nodos, tal como se muestra en la Fig.5.11b, en tanto que las cargas restantes lo hacen sobre los elementos de la estructura, tal como se muestra en la Fig.5.11c.

Para efectuar la sustitución de éstas últimas por las respectivas cargas nodales equivalentes, se fijan los nodos de la estructura contra todos los desplazamientos posibles. Para la viga mostrada, este procedimiento da como resultado dos vigas doblemente empotradas, tal como se muestra en la Fig.5.11d.

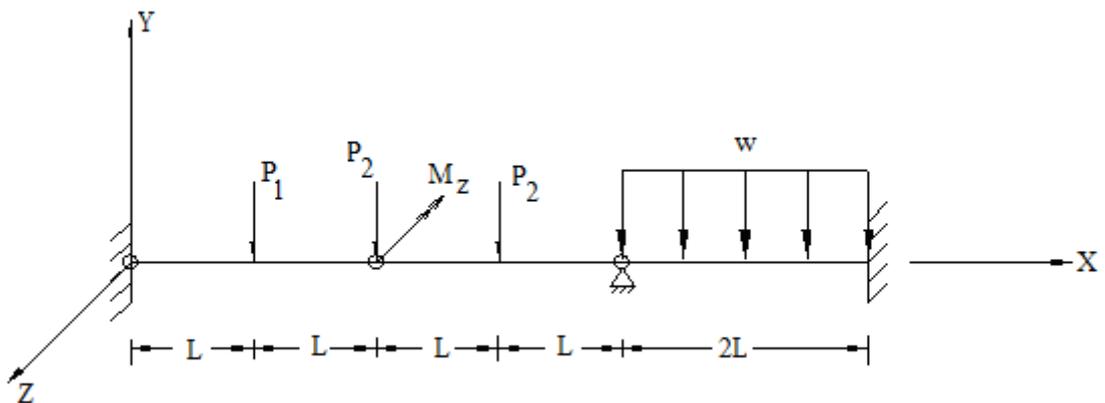
Cuando estas vigas están sujetas a las cargas que actúan sobre los elementos, se produce un conjunto de acciones sobre los empotramientos, las cuales se pueden obtener siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para determinar los coeficientes de rigidez ya descrito, y que para este caso particular se muestran en la Fig.5.11d.

Estas mismas acciones de empotramiento se muestran en la Fig.5.11e, donde se representan como acciones de empotramiento para la estructura fija. Invertiendo el sentido de estas acciones, se obtiene finalmente un conjunto de acciones que son estáticamente equivalentes a las cargas que actúan sobre los elementos. Este conjunto de acciones, al sumarse al conjunto de cargas que actúan sobre los nodos que se muestran en la Fig.5.11b, constituyen el conjunto de cargas combinadas que se muestra en la Fig.5.11f.

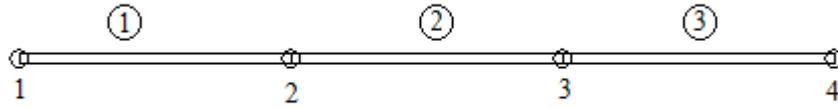
Como ya se mencionó, los desplazamientos de la estructura bajo la acción de las cargas combinadas, deben ser los mismos que los producidos por las cargas reales. La constatación de que este requisito en verdad se verifica sigue los mismos pasos que los descritos en la sección 5.2.2.

5.4.4.- Ejemplo de una viga continua de eje recto

En la Figura se muestra una viga continua de eje recto, homogénea, sometida al estado de cargas indicado. Se desea determinar el campo de los desplazamientos, las acciones de extremo de miembro y las reacciones. Para el elemento 1: $I_z = 100 \times 10^{-6} \text{ m}^4$; para el elemento 2: $I_z = 200 \times 10^{-6} \text{ m}^4$ y para el elemento 3: $I_z = 300 \times 10^{-6} \text{ m}^4$. Las cargas son $P_1 = 10 \text{ KN}$, $P_2 = 20 \text{ KN}$, $M_z = 400 \text{ KN-m}$, $W = 12 \text{ KN/m}$. El módulo de elasticidad para toda la viga es $E = 200 \text{ GPa}$ y $L = 1.0 \text{ m}$.



a.- Discretización del dominio



Las incidencias son:

Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	2
	2	3
3	1	3
	2	4

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez

La matriz local de rigidez de un elemento de viga de eje recto, viene dada por:

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \text{Simétrica} & & & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Para el elemento 1:

$$[k]^{(1)} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 \\ & 0.40 & -0.30 & v \\ \text{Simétrica} & & 0.30 & -0.30 \\ & & & 0.40 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[k]^{(2)} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.60 & 0.60 & -0.60 & 0.60 \\ & 0.80 & -0.60 & 0.40 \\ \text{Simétrica} & & 0.60 & -0.60 \\ & & & 0.80 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

$$[k]^{(3)} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.90 & 0.90 & -0.90 & 0.90 \\ & 1.20 & -0.90 & 0.60 \\ \text{Simétrica} & & 0.90 & -0.90 \\ & & & 1.20 \end{bmatrix}$$

c.- Ensamblaje de las Matrices Locales

En este ejemplo, de nuevo, los sistemas de referencia local y global coinciden y, por lo tanto, no es necesario transformar estas tres matrices locales de rigidez, desde el sistema local de referencia al global. De modo que, de acuerdo con las incidencias establecidas, el ensamblaje de las matrices locales de rigidez conduce a:

$$[K] = 10^8 \begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 0.40 & -0.30 & 0.20 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 0.90 & 0.30 & -0.60 & 0.60 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.20 & -0.60 & 0.40 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.50 & 0.30 & -0.90 & 0.90 \\ \text{Simétrica} & & & & & 2.0 & -0.90 & 0.60 \\ & & & & & & 0.90 & -0.90 \\ & & & & & & & 1.20 \end{bmatrix}$$

d.- Vector de Cargas Nodales Equivalentes

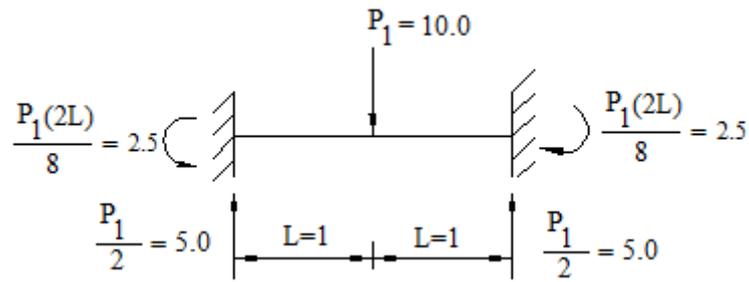
Como se puede notar, en este caso, las cargas no están aplicadas únicamente sobre los nodos, sino que también, se ejercen cargas directamente sobre los elementos, de modo que se hace necesario construir el respectivo vector de cargas nodales equivalentes.

El vector de cargas asociado a las acciones externas aplicadas directamente sobre los nodos es el siguiente:

$$\{F_1\}^T = \{0.0 \quad 0.0 \quad -20.0 \quad -40.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0\}$$

y el vector de cargas nodales equivalentes para los elementos cargados viene dada por:

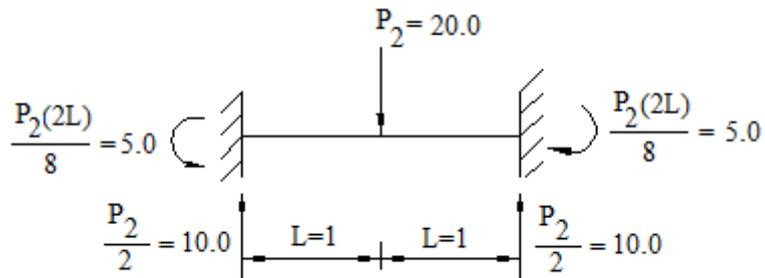
Elemento 1:



luego:

$$\{f_1\}^T = 10^3 \{-5.0 \quad -2.5 \quad -5.0 \quad 2.5\}$$

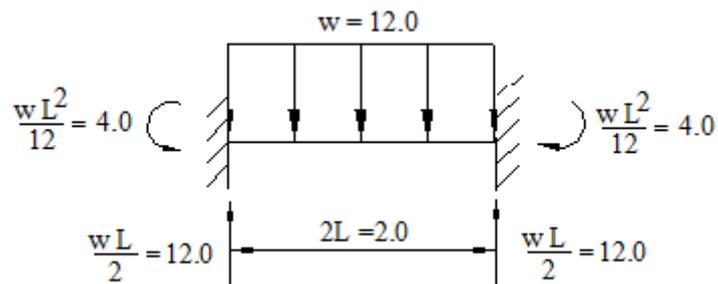
Elemento 2:



luego:

$$\{f_2\}^T = 10^3 \{-10.0 \quad -5.0 \quad -10.0 \quad 5.0\}$$

Elemento 3:



luego;

$$\{f_3\}^T = 10^3 \{-12.0 \quad -4.0 \quad -12.0 \quad 4.0\}$$

Por lo tanto, el vector de cargas nodales equivalentes correspondiente a las acciones que se ejercen directamente sobre los elementos de la viga es igual a:

$$\{F_2\}^T = 10^3 \{-5.0 \quad -2.5 \quad -15.0 \quad -2.5 \quad -22.0 \quad 1.0 \quad -12.0 \quad 4.0\}$$

y, finalmente, el vector de cargas nodales equivalentes de la viga es:

$$\{F\}^T = \{F_1\}^T + \{F_2\}^T = 10^3 \{-5.0 \quad -2.5 \quad -35.0 \quad -42.5 \quad -22.0 \quad 1.0 \quad -12.0 \quad 4.0\}$$

De este modo, el sistema global de ecuaciones es:

$$10^8 \begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 0.40 & -0.30 & 0.20 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 0.90 & 0.30 & -0.60 & 0.60 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.20 & -0.60 & 0.40 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.50 & 0.30 & -0.90 & 0.90 \\ \text{Simétrica} & & & & & 2.0 & -0.90 & 0.60 \\ & & & & & & 0.90 & -0.90 \\ & & & & & & & 1.20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{Bmatrix}$$

e.- Introducción de las Condiciones de Contorno

El sistema global de ecuaciones, modificado por la introducción de las condiciones de contorno es:

$$10^8 \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 0.90 & 0.30 & 0.0 & 0.60 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 1.20 & 0.0 & 0.40 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & & & 2.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & & & 1.0 & 0.0 \\ & & & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -35.0 \\ -42.5 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

cuya solución es:

$$\{U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad U_5 \quad U_6 \quad U_7 \quad U_8\} = \{0.0 \quad 0.0 \quad -0.4115\text{mm} \quad -0.3151\text{rad} \quad 0.0 \quad 0.1915\text{rad} \quad 0.0 \quad 0.0\}$$

f.- Cálculo de las acciones de extremo de miembro

Recordando, de nuevo, que los sistemas de referencia local y global coinciden, las acciones de extremo de miembro de los elementos, vienen dadas por:

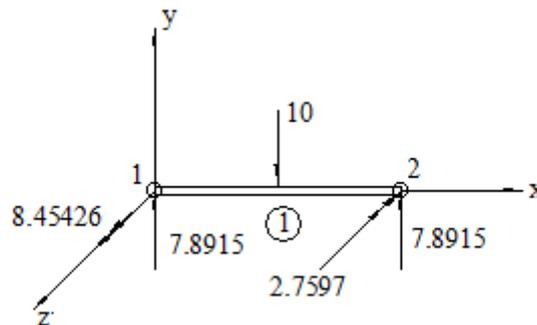
$$\{f\}^{(e)} = [k]^{(e)}\{u\}^{(e)}$$

Se tendrá:
Elemento 1:

$$10^5 \begin{bmatrix} 0.30 & 0.30 & -0.30 & 0.30 \\ & 0.40 & -0.30 & 0.20 \\ \text{Simétrica} & & 0.30 & -0.30 \\ & & & 0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.4115 \\ -0.3151 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 2.8915 \\ 6.0426 \\ -2.8915 \\ -0.25969 \end{bmatrix}$$

Puesto que el elemento está cargado, a estas acciones en los nodos del mismo, habrá que sumarle las acciones en los nodos del elemento de la estructura fija; es decir, el vector final de las acciones que se generan en los nodos de este elemento es:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 2.8915 \\ 6.0426 \\ -2.8915 \\ -0.25969 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5.0 \\ 2.5 \\ 5.0 \\ -2.5 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 7.8915 \\ 8.45426 \\ 2.1085 \\ -2.7597 \end{Bmatrix}$$

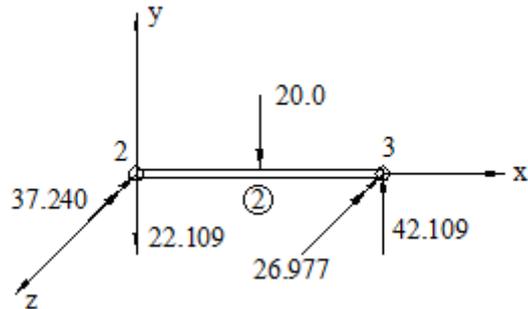


Elemento 2:

$$10^5 \begin{bmatrix} 0.60 & 0.60 & -0.60 & 0.60 \\ & 0.80 & -0.60 & 0.40 \\ \text{Simétrica} & & 0.60 & -0.60 \\ & & & 0.80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4115 \\ -0.3151 \\ 0.0 \\ 0.1915 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} -32.109 \\ -42.240 \\ 32.109 \\ 21.977 \end{bmatrix}$$

Este elemento también está cargado, luego:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 32.109 \\ -42.240 \\ 32.109 \\ 21.977 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10.0 \\ 5.0 \\ 10.0 \\ -5.0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} -22.109 \\ -37.240 \\ 42.109 \\ -26.977 \end{Bmatrix}$$

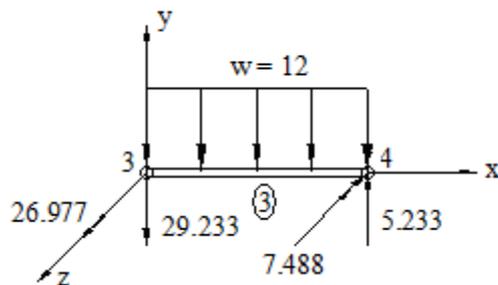


Elemento 3:

$$10^5 \begin{Bmatrix} 0.90 & 0.90 & -0.90 & 0.90 \\ & 1.20 & -0.90 & 0.60 \\ \text{Simétrica} & & 0.90 & -0.90 \\ & & & 1.20 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.1915 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 17.233 \\ 22.977 \\ -17.233 \\ 11.488 \end{Bmatrix}$$

y, debido a la carga externa sobre el elemento:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 17.233 \\ 22.977 \\ -17.233 \\ 11.488 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12.0 \\ 4.0 \\ 12.0 \\ -4.0 \end{Bmatrix} = 10^3 \begin{Bmatrix} 29.233 \\ 26.977 \\ -5.233 \\ 7.488 \end{Bmatrix}$$



g.- Cálculo de las reacciones

Las reacciones se pueden obtener mediante el equilibrio nodal de las acciones en los soportes de la estructura. En este caso, el vector de las reacciones viene dado por:

Nodo 1: $10^3 \{7.8915 \quad 8.5426\}$
Nodo 2: $10^3 \{71.341 \quad 0.0\}$
Nodo 3: $10^3 \{-5.2326 \quad 7.4884\}$

5.5.- Pórticos planos

5.5.1.- Introducción

Al igual que los elementos de viga de eje recto, muchas estructuras también están conformadas por elementos de pórticos planos. Esta sección está dedicada a la deducción de la matriz local de rigidez de un elemento de pórtico plano y, posteriormente, mediante la respectiva matriz de rotación se determinará dicha matriz con relación al sistema global de referencia de la estructura.

5.5.2. Elemento de pórtico plano

En la Fig.5.12.a se puede observar una estructura en el plano X-Y, sobre la cual, en el mismo plano, actúan las cargas indicadas. En la Fig.5.12.b se muestra un elemento genérico de pórtico plano y el respectivo sistema local de referencia asociado. Como se puede apreciar, el elemento de pórtico plano es una combinación del elemento axial y el elemento de viga de eje recto. Cada nodo, en este elemento, tendrá entonces tres grados de libertad y la matriz local de rigidez será, por lo tanto, de 6 x 6.

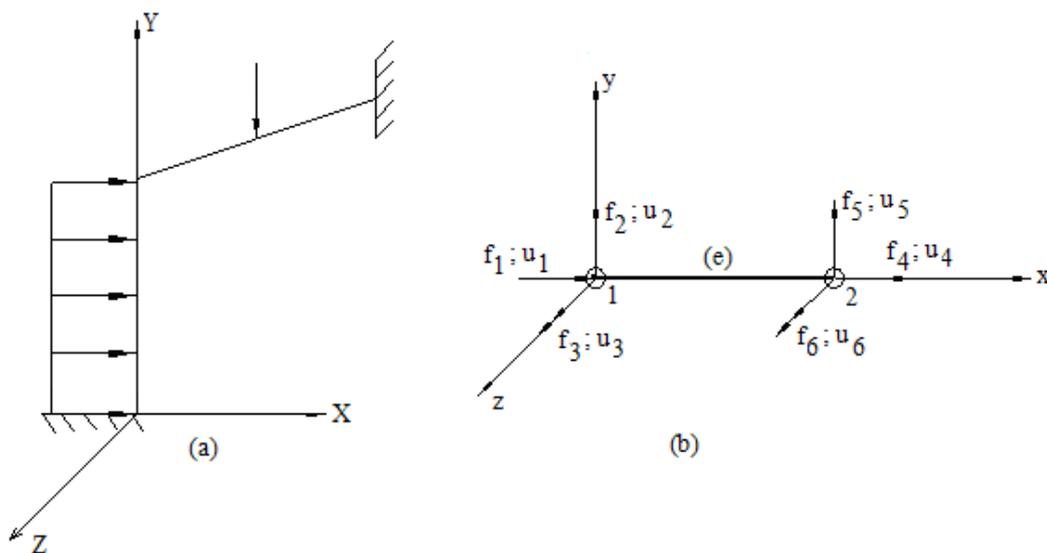


Fig.5.12 Pórtico plano; (a) estructura asociada al sistema global X-Y-Z;(b) elemento de pórtico plano referido al sistema local x-y-z

Puesto que los efectos axiales se consideran desacoplados de los efectos flectores -es decir; las fuerzas cortantes y los momentos flectores no son afectados por las fuerzas axiales y viceversa-, la matriz de rigidez de este elemento se puede construir incorporando los efectos axiales a la matriz local de rigidez del elemento de viga de eje recto. En vista del desacople mencionado, las filas y columnas (1 y 4) asociadas a los efectos axiales serán cero exceptuando aquellos que multiplican a u_1 y u_4 .

Luego, la matriz local de rigidez del elemento de pórtico plano viene dada por:

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

5.5.3.- Transformación de coordenadas para un elemento de pórtico plano

Como en el caso del elemento de armadura plana, antes de ensamblar, se deben obtener las matrices locales de rigidez de los elementos de pórtico plano, asociadas al sistema global de referencia de la estructura. Para ello considérese el elemento de pórtico plano mostrado en la siguiente Fig.5.13.

Las relaciones de transformación de los desplazamientos u_1, u_2, u_4 y u_5 entre los dos sistemas de referencia, son idénticas al caso del elemento de armadura plana. Adicionalmente, los desplazamientos (rotaciones) u_3 y u_6 , son los mismos que U_3 y U_6 , debido a que todos los elementos estarán en el plano X-Y; es decir, el eje z, igual que el eje Z, son perpendiculares al plano X-Y. Luego, la matriz de rotación para este tipo de elemento viene dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{Cos}\theta & \text{Sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{Sen}\theta & \text{Cos}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

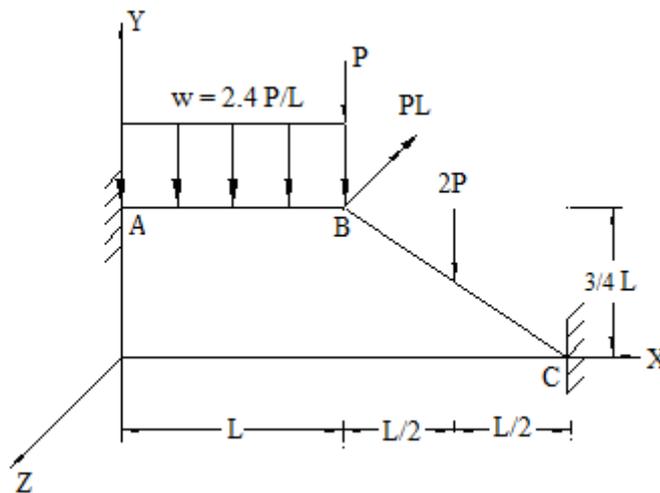
y, la matriz de rigidez local de este elemento, referida al sistema global de referencia, será como en el caso del elemento de armadura plana:

$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad (3)$$

donde, $[k]$ es la matriz de rigidez dada por la ec.(5.46) y $[R]$ es la matriz de rotación dada por la ec.(5.47).

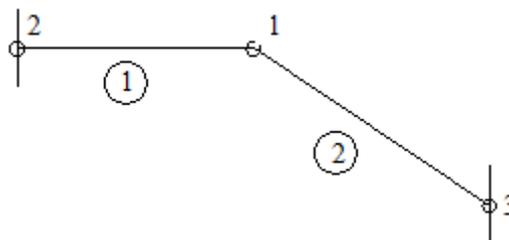
5.5.4.- Ejemplo de pórtico plano

En la Figura se muestra una estructura de pórtico plano y el estado de cargas asociado.



Para esta estructura: $E = 10000$ Ksi; $L = 100$ pulg; $I_z = 1000$ pulg⁴; $A = 10$ pulg²; $P = 10$ Kips.

a.- Discretización del dominio



Elemento	Numeración	
	Local	Global

1	1	2
	2	1
2	1	1
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez

Como se vio, la matriz local de rigidez de un elemento de pórtico plano viene dada por:

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Elemento 1:

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1 \times 10^4 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \times 10^4 & 0.0 & 0.0 \\ & 0.12 \times 10^3 & 0.6 \times 10^4 & 0.6 \times 10^4 & 0.6 \times 10^4 & 0.6 \times 10^4 \\ & & 0.4 \times 10^6 & 0.0 & -0.6 \times 10^4 & 0.2 \times 10^6 \\ & & & 0.1 \times 10^4 & 0.0 & 0.0 \\ & \text{Simétrica} & & & 0.12 \times 10^3 & -0.6 \times 10^4 \\ & & & & & 0.4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 \times 10^3 & -0.6 \times 10^4 & 0.0 & -0.8 \times 10^3 & 0.0 & 0.0 \\ & 0.614 \times 10^2 & 0.384 \times 10^4 & 0.0 & -0.614 \times 10^2 & 0.384 \times 10^4 \\ & & 0.32 \times 10^6 & 0.384 \times 10^4 & -0.384 \times 10^4 & 0.16 \times 10^6 \\ & & & 0.8 \times 10^3 & 0.0 & 0.0 \\ & \text{Simétrica} & & & 0.614 \times 10^2 & -0.384 \times 10^4 \\ & & & & & 0.32 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

c.- Matrices de rotación

Para el elemento de pórtico plano, la matriz de rotación, como ya fue establecido, viene dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 1:

$$[R]^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[R]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.6 & 0.8 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.8 & -0.6 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.6 & 0.8 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

d.- Matrices locales referidas al sistema global de referencia

En general, las matrices locales de rigidez, referidas al sistema global vienen dadas por:

$$[K] = [\beta]^T [k] [\beta]$$

Elemento 1:

$$[\mathbf{K}]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1 \times 10^4 & 0.0 & 0.0 & -0.1 \times 10^4 & 0.0 & 0.0 \\ & 0.12 \times 10^3 & 0.6 \times 10^4 & 0.0 & -0.12 \times 10^3 & 0.6 \times 10^4 \\ & & 0.4 \times 10^6 & 0.0 & -0.6 \times 10^4 & 0.2 \times 10^6 \\ & & & 0.1 \times 10^4 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & & 0.12 \times 10^3 & -0.6 \times 10^4 \\ & & & & & 0.4 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[\mathbf{K}]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.534 \times 10^3 & -0.355 \times 10^3 & 0.230 \times 10^4 & -0.534 \times 10^3 & 0.355 \times 10^3 & 0.230 \times 10^4 \\ & 0.327 \times 10^3 & 0.307 \times 10^4 & 0.355 \times 10^3 & -0.327 \times 10^3 & 0.307 \times 10^4 \\ & & 0.320 \times 10^6 & -0.230 \times 10^4 & -0.307 \times 10^4 & 0.160 \times 10^6 \\ & & & 0.534 \times 10^3 & 0.160 \times 10^6 & -0.230 \times 10^4 \\ \text{Simétrica} & & & & 0.327 \times 10^3 & -0.307 \times 10^4 \\ & & & & & 0.320 \times 10^6 \end{bmatrix}$$

e.1.- Vector de cargas aplicadas en los nodos

$$\{F_n\}^T = \{0.0 \quad -100.0 \quad -1000.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0\}$$

e.2.- Vector de cargas aplicadas en los elementos

Elemento 1:

$$\{f_1\}^T = \{0.0 \quad 12.0 \quad 200.0 \quad 0.0 \quad 12.0 \quad -200.0\}$$

Elemento 2:

$$\{f_2\}^T = \{-6.0 \quad 8.0 \quad 250.0 \quad -6.0 \quad 8.0 \quad -250.0\}$$

Pero, como ya se hizo notar:

$$\{F\} = [\mathbf{R}]^T \{f\}$$

Luego, los vectores de cargas nodales equivalentes correspondientes a cada elemento, deben ser referenciados al sistema global de referencia y, en este caso vienen dados por:

$$\{F_{e1}\}^T = [\mathbf{R}]^{(1)T} \{f_1\} = \left\{ \overbrace{0.0 \quad 12.0 \quad 200.00.0}^{\text{nodo2}} \quad \overbrace{12.0 \quad -200.0}^{\text{nodo1}} \right\}$$

$$\{F_{e2}\}^T = [R]^{(2)T} \{f_2\} = \left\{ \begin{array}{cccc} \text{nodo1} & & & \text{nodo3} \\ 0.0 & 10.0 & 250.00.0 & 10.0 & -250.0 \end{array} \right\}$$

El ensamblaje de los vectores de carga, conduce a:

$$\begin{aligned} \{F\}^T &= \{F_n\}^T - [\{F_{e1}\}^T + \{F_{e2}\}^T] = \\ &= \left\{ \begin{array}{ccccccc} \text{nodo1} & & & \text{nodo2} & & & \text{nodo3} \\ 0.0 & 32.0 & -1050.00.0 & -12.0 & -200.00.0 & 10.0 & 250.0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

f.- Ensamble de las matrices locales de rigidez, introducción de las condiciones de contorno y solución del sistema de ecuaciones

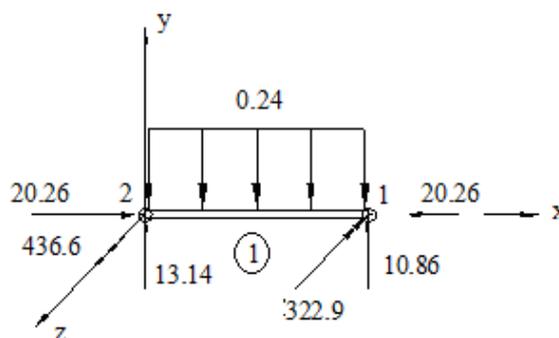
El lector deberá, mediante el programa AER, resolver completamente este problema y verificar los siguientes resultados.

f1. - Campo de desplazamientos

Nodo	Dir. 1	Dir. 2	Dir. 3
1	-0.02026	-0.09936	-0.017976
2	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0

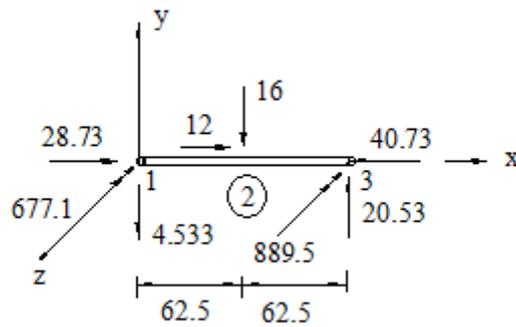
f2. - Acciones de los extremos de miembro

Elemento 1:



$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0; & + 20.26 - 20.26 &= 0 \\ \sum F_y &= 0; & + 13.14 + 10.86 - 0.24 \times 100 &= 0 \\ \sum M_z &= 0; & + 436.6 - 322.9 + 10.86 \times 100 - 0.24 \times 100 \times 50 &= 0 \end{aligned}$$

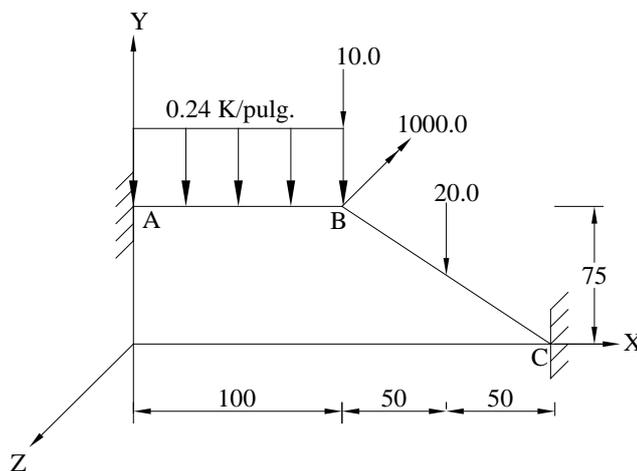
Elemento 2:



$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad + 28.73 + 12.0 - 40.73 = 0 \\ \sum F_y = 0; & \quad - 4.533 - 16.0 + 20.53 = 0 \\ \sum M_z = 0; & \quad - 677.1 - 889.5 - 16.0 \times 62.5 + 29.53 \times 12.5 = 0 \end{aligned}$$

f3.- Reacciones

Nodo	Reac. 1	Reac. 2	Reac. 3
2	20.261	13.138	436.65
3	-20.261	40.862	-889.52



$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0; & + 20.261 - 20.261 &= 0 \\ \sum F_y &= 0; & - 24.0 - 10.0 - 20.0 + 13.138 + 40.862 &= 0 \\ \sum M_z &= 0; & 0; 436.65 - 24.0 \times 50.0 - 10.0 \times 1000 - 1000.0 - 20 \times 150 - 889.52 + & \\ & & 40.862 \times 200 - 20.261 \times 75.0 &= 0\end{aligned}$$

5.6.- Elemento: Parrilla

5.6.1- Introducción

Una parrilla es una estructura que soporta cargas perpendiculares a su plano. Se supone que la unión de sus elementos son conexiones rígidas. El piso mostrado en la Fig.5.13 es ejemplo típico de este tipo de estructuras.

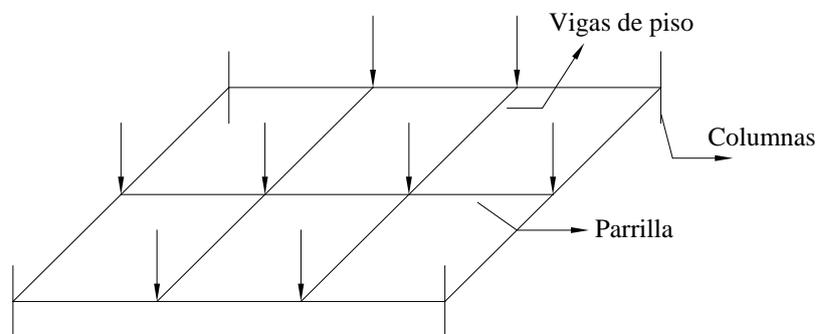


Fig.5.13 Estructura conformada por elementos tipo parrilla

Al analizar este tipo de elemento se desprecia, igual que en el caso del elemento de viga de eje recto, la deformación axial. Sin embargo, adicionalmente a la flexión alrededor del eje horizontal de la sección transversal, los elementos de parrilla también resisten cargas que generan torsión alrededor del eje longitudinal del elemento. Por lo tanto, en cada nodo, existirá un desplazamiento vertical, una rotación alrededor del eje longitudinal del elemento debido a la torsión. Cada nodo, por lo tanto, tiene tres grados de libertad.

5.6.2.- Elemento de parrilla

Se seleccionará un sistema coordenado que defina la parrilla en el plano X-Y. Las cargas verticales actuarán, por lo tanto, en la dirección Z y los momentos en los nodos del elemento se generarán (o se aplicarán) en el plano de la parrilla, tal como se muestra en la siguiente Fig.5.14.

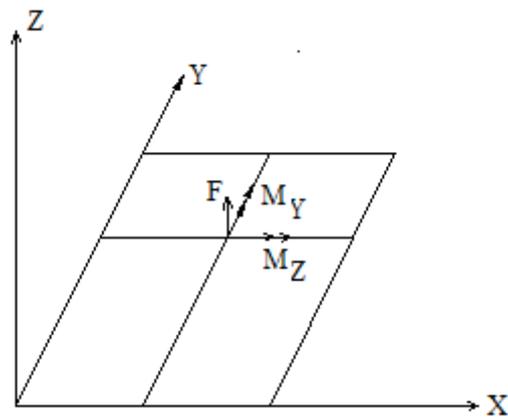


Fig.5.14 Parrilla asociada al sistema global de referencia

En la Fig.5.15 se muestra el sistema local de referencia de un elemento de parrilla.

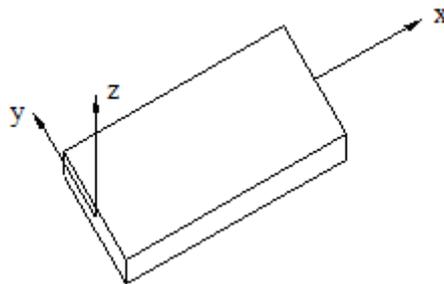


Fig.5.15. Elemento parrilla asociado al sistema local de referencia

La flexión se genera, tal como se puede observar, alrededor del eje y; la torsión alrededor del eje x. Los desplazamientos y las fuerzas se considerarán positivos cuando actúen en las direcciones positiva de los ejes coordenados locales. Para los efectos de flexión y torsión se usará, por supuesto, la regla de la mano derecha.

La siguiente Fig.5.16 muestra las acciones que se generan en los nodos de un elemento de parrilla.

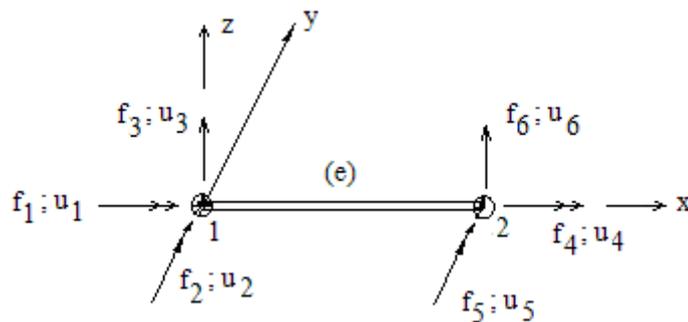


Fig.5.16. Acciones nodales en un elemento de parrilla

Nótese que u_1, u_2, u_4 y u_5 son rotaciones y u_3 y u_6 son traslaciones. El sistema local de referencia seleccionado permite determinar, directamente, del elemento de viga ya estudiado, cuatro de las seis ecuaciones que relacionan las “fuerzas” con los “desplazamientos” de este elemento. Así, los coeficientes de rigidez mostrados en la Fig.5.17 (se invita al lector a la respectiva verificación), son:

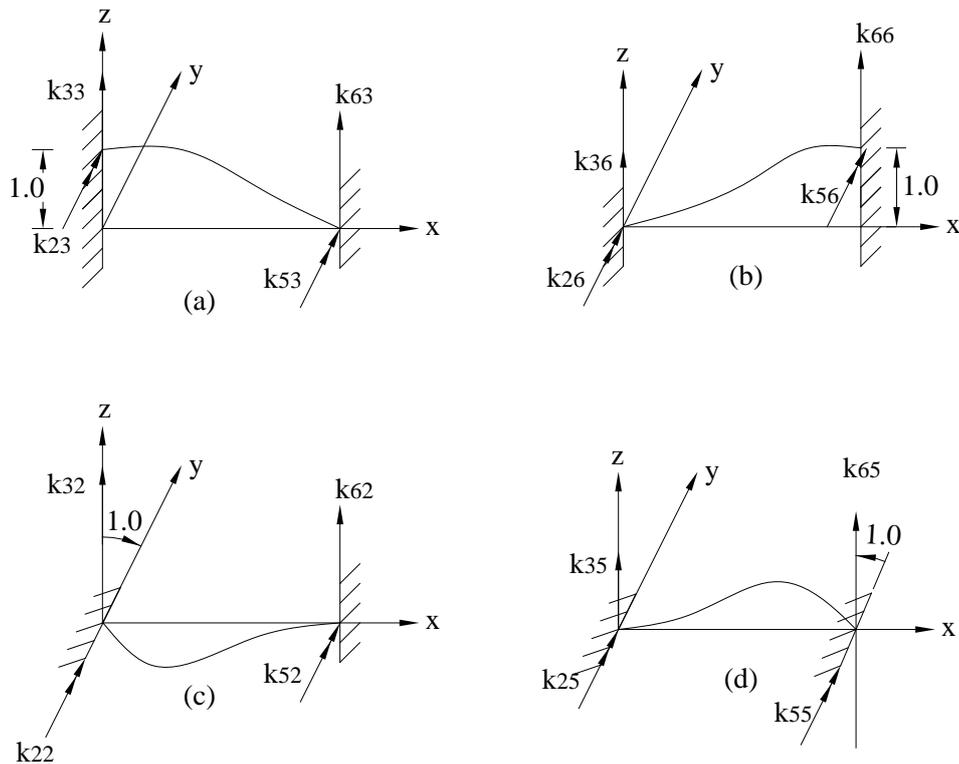


Fig.5.17 Coeficientes de rigidez de un elemento parrilla

De la Fig.5.17a, $u_3 = 1.0$, luego:

$$k_{33} = 12 \frac{EI}{L^3}; \quad k_{23} = -6 \frac{EI}{L^2}; \quad k_{53} = -6 \frac{EI}{L^2}; \quad k_{63} = -12 \frac{EI}{L^3}$$

De la Fig.5.17b, $u_6 = 1.0$, por lo tanto:

$$k_{66} = 12 \frac{EI}{L^3}; \quad k_{56} = 6 \frac{EI}{L^2}; \quad k_{36} = -12 \frac{EI}{L^3}; \quad k_{26} = 6 \frac{EI}{L^2}$$

De la Fig.5.17c, $u_2 = 1.0$, entonces:

$$k_{22} = 4 \frac{EI}{L}; \quad k_{52} = 2 \frac{EI}{L}; \quad k_{32} = -6 \frac{EI}{L^2}; \quad k_{62} = 6 \frac{EI}{L^2}$$

Finalmente, de la Fig.5.17d; $u_5 = 1.0$, luego:

$$k_{55} = 4 \frac{EI}{L}; \quad k_{25} = 2 \frac{EI}{L}; \quad k_{65} = 6 \frac{EI}{L^2}; \quad k_{35} = -6 \frac{EI}{L^2}$$

Para determinar los coeficientes de rigidez asociados a la torsión considérese el elemento de sección transversal circular mostrado en la Fig.5.18. De la mecánica de materiales se sabe que para un elemento de sección transversal circular uniforme, el ángulo de rotación entre dos secciones transversales circulares, separadas una distancia L, viene dado por:

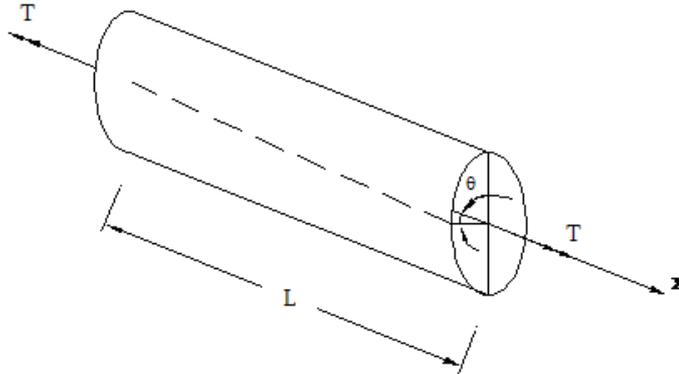


Fig.5.18 Elemento de sección transversal circular sometido a torsión

$$\theta = \frac{TL}{JG} \quad (5.47)$$

donde: T: es el torque entre las dos secciones; L es la distancia entre dos secciones; J es el momento polar de inercia de la sección transversal y G es el módulo de rigidez del material.

Luego, la rigidez torsional viene dada por: JG/L . Esta rigidez torsional permite relacionar los momentos torsores f_1 y f_4 con los desplazamientos torsionales (rotacionales) u_1 y u_4 .

Hay que recordar, sin embargo, que las secciones transversales circulares son las únicas que permanecen planas después de la aplicación del par torsor; es decir no se generan desplazamientos paralelos al eje x del elemento (perpendicular a la sección transversal). Para cualquier otro tipo de sección transversal, después de la aplicación del par torsor, ésta sufrirá lo que da en llamar "alabeo"; es decir, aparecen desplazamientos longitudinales y la sección transversal ya no permanece plana. Algunas porciones de la sección transversal tendrán desplazamientos en el sentido positivo del eje x, y otras tendrán desplazamientos negativos. Sin embargo, éste alabeo es, generalmente despreciado para la mayoría de los componentes estructurales y por lo tanto, en lo que sigue, no se considerarán.

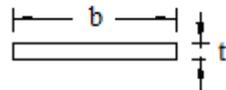
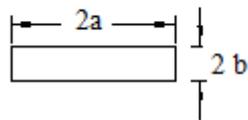
Así pues, la matriz local de rigidez para este elemento viene dada por:

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \\ & & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} \\ & & & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & & \frac{4EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ & & & & & \frac{12EI}{L^3} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

El momento polar de inercia de secciones transversales, uniformes, abiertas conformadas por elementos rectangulares delgados viene dado, en forma aproximada, por:

$$J = \sum_{i=1}^n \frac{b_i t_i^3}{3} \quad (5.49)$$

donde n es el número de rectángulos que conforman la sección transversal. En la Fig.5.19 se da el valor de J para algunos casos comunes:



$$J = ab^3 \left[\frac{16}{3.0} - 3.36 \left(\frac{b}{a} \right) \frac{(1-b^4)}{12a^4} \right]$$

$$J = \frac{bt^3}{3.0}$$

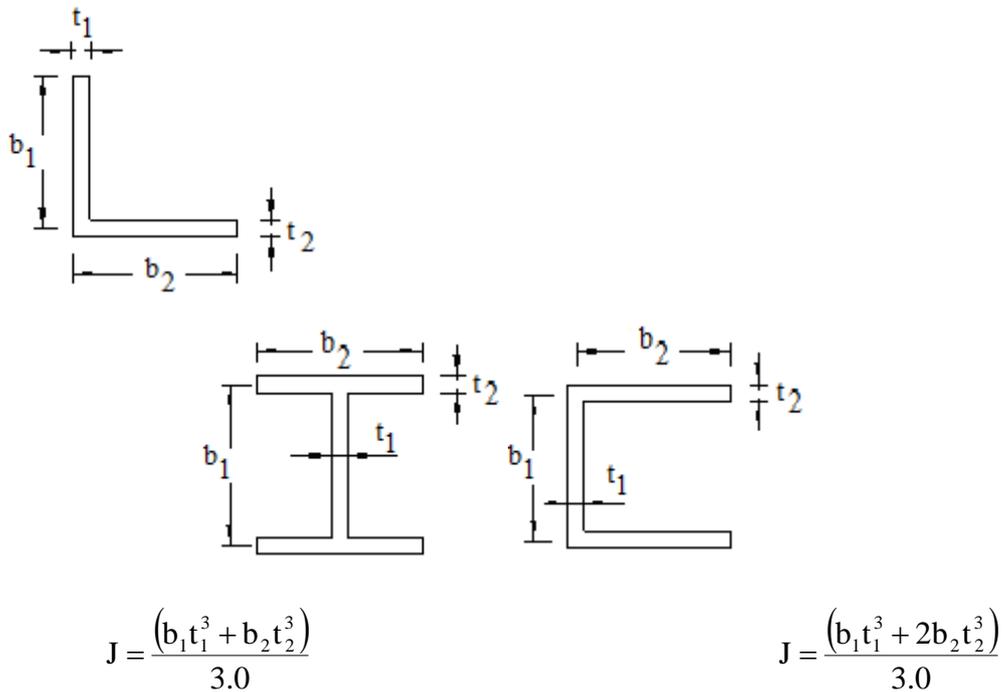


Fig.5.19 Secciones transversales uniformes abiertas

5.6.3.- Transformación de coordenadas para el elemento parrilla

En el sistema global de referencia seleccionado para el análisis de una estructura tipo parrilla, ésta físicamente, estará ubicada en el plano X-Y del sistema global de referencia, el cual coincide con el plano x-y del sistema local de referencia de cualquiera de los elementos que conformen la estructura. Por lo tanto, el eje global Z y el eje local z son paralelos.

Como se muestra en la Fig.5.20, se debe entonces transformar los desplazamientos nodales, del sistema local al sistema global de referencia, mediante una rotación alrededor del eje local z.

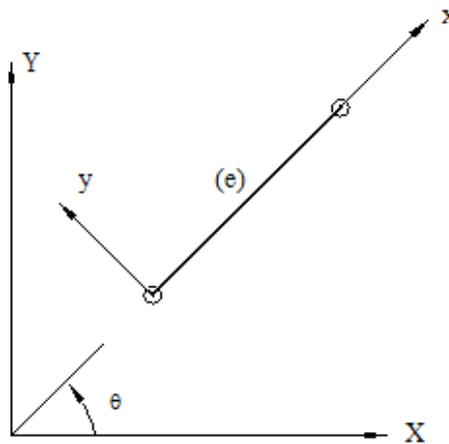


Fig.5.20. Sistemas de referencia local y global para un elemento parrilla

De esta figura se infiere que la transformación requerida es idéntica a la utilizada en el análisis de pórticos planos. Luego:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

y, como siempre, la matriz local [k], referida al sistema global, vendrá dada por:

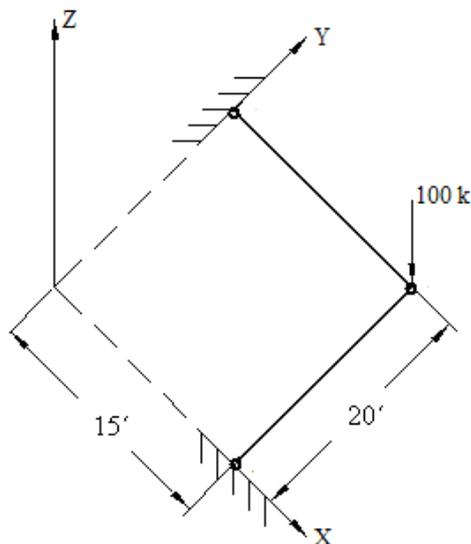
$$[K] = [R]^T [k] [R] \quad (5.51)$$

5.6.4 Cargas sobre los elementos parrilla

Debido a la forma como se seleccionó el sistema global de referencia, las cargas sobre los elementos, para un elemento de parrilla se tratan del mismo modo que en los casos de elementos de vigas y pórticos planos.

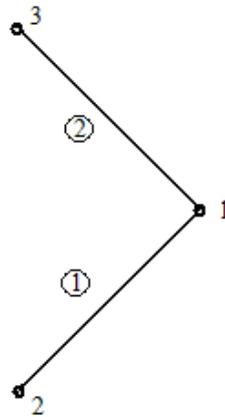
5.6.5.- Ejemplo de estructura con elementos de parrilla

El análisis de la siguiente parrilla mediante el programa AER, conduce a los siguientes resultados. Se invita al lector a corroborar los.



Para ambos elementos: $E = 29.0 \times 10^6$ psi
 $G = 11.2 \times 10^6$ psi
 $I_y = 1200$ pulg⁴
 $I_x = 400$ pulg⁴

a.- Discretización del dominio



Elemento	Numeración	
	Local	Global
1	1	1
	2	2
2	1	1
	2	3

b.- Construcción de las matrices locales de rigidez

Utilizando las ec.(5.48) y (5.50), se obtienen, respectivamente, las matrices locales de rigidez de los elementos y las matrices de rotación asociadas. Así para el elemento 1:

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.187E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.187E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.580E+09 & -0.363E+07 & 0.000E+00 & 0.290E+09 & 0.363E+07 \\ 0.000E+00 & -0.363E+07 & 0.302E+05 & 0.000E+00 & -0.363E+07 & -0.302E+05 \\ -0.187E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.187E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.290E+09 & -0.363E+07 & 0.000E+00 & 0.580E+09 & 0.363E+07 \\ 0.000E+00 & 0.363E+07 & -0.302E+05 & 0.000E+00 & 0.363E+07 & 0.302E+05 \end{bmatrix}$$

$$[R]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.000E+00 & -0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.100E+01 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.100E+01 \end{bmatrix}$$

y, la ec.(5.51) permite obtener la matriz local de rigidez asociada al sistema global de referencia de este elemento; es decir:

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.580E+09 & 0.000E+00 & -0.363E+07 & 0.290E+09 & 0.000E+00 & 0.363E+07 \\ 0.000E+00 & 0.187E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.187E+08 & 0.000E+00 \\ -0.363E+07 & 0.000E+00 & 0.302E+05 & -0.363E+07 & 0.000E+00 & -0.302E+05 \\ 0.290E+09 & 0.000E+00 & -0.363E+07 & 0.580E+09 & 0.000E+00 & 0.363E+07 \\ 0.000E+00 & -0.187E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.187E+08 & 0.000E+00 \\ 0.363E+07 & 0.000E+00 & -0.302E+05 & 0.363E+07 & 0.000E+00 & 0.302E+05 \end{bmatrix}$$

Para el elemento 2, estas matrices vienen dadas por:

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.773E+09 & -0.644E+07 & 0.000E+00 & 0.387E+09 & 0.644E+07 \\ 0.000E+00 & -0.644E+07 & 0.716E+05 & 0.000E+00 & -0.644E+07 & -0.716E+05 \\ -0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.387E+09 & -0.644E+07 & 0.000E+00 & 0.773E+09 & 0.644E+07 \\ 0.000E+00 & 0.644E+07 & -0.716E+05 & 0.000E+00 & 0.644E+07 & 0.716E+05 \end{bmatrix}$$

$$[R]^{(2)} = \begin{bmatrix} -0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & -0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.100E+01 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.100E+01 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.100E+01 \end{bmatrix}$$

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.773E+09 & 0.644E+07 & 0.000E+00 & 0.387E+09 & -0.644E+07 \\ 0.000E+00 & 0.644E+07 & 0.716E+05 & 0.000E+00 & 0.644E+07 & -0.716E+05 \\ -0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.249E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.387E+09 & 0.644E+07 & 0.000E+00 & 0.773E+09 & -0.644E+07 \\ 0.000E+00 & -0.644E+07 & -0.716E+05 & 0.000E+00 & -0.644E+07 & 0.716E+05 \end{bmatrix}$$

El vector de cargas nodales es:

$$\{F\}^T = \{0.0 \quad 0.0 \quad -0.10000E+06 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0 \quad 0.0\}$$

c.- Desplazamientos nodales

Después de ensambladas $[K]^{(1)}$ y $[K]^{(2)}$ e introducir las condiciones de contorno, la solución del sistema de ecuaciones resultante es:

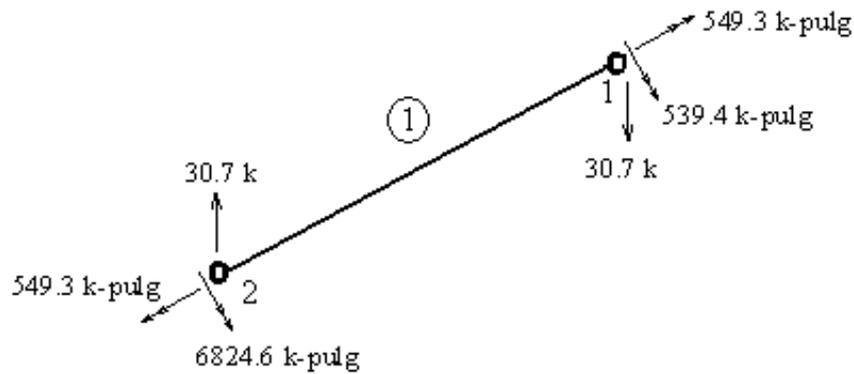
Desplazamientos nodales			
Nodo	Dir. 1	Dir. 2	Dir. 3
1	-0.21673E-01	0.29427E-01	-0.36165E+01
2	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0

d.- Acciones de extremo de miembro

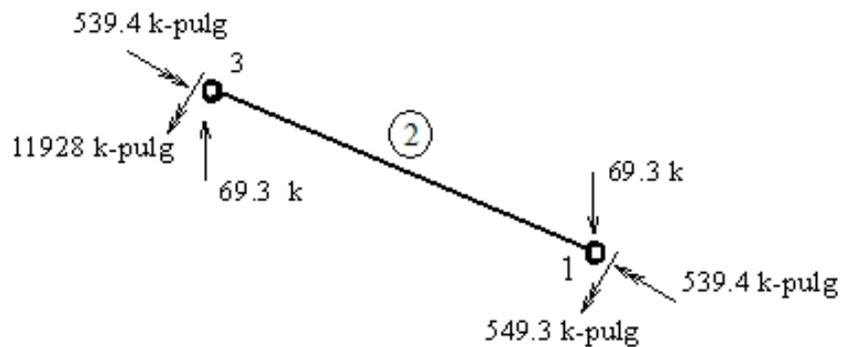
Las acciones de extremo de miembro de esta estructura son:

Elemento	Acciones de extremo de miembro			
	Nodos	M_x	M_y	F_z
1	1	-0.5493E+06	0.5394E+06	-0.3068E+05
	2	0.5493E+06	0.6825E+07	0.3068E+05
2	1	0.5394E+06	0.5493E+06	-0.6932E+05
	3	-0.5394E+06	0.1193E+0	0.6932E+05

Elemento: 1



Elemento: 2

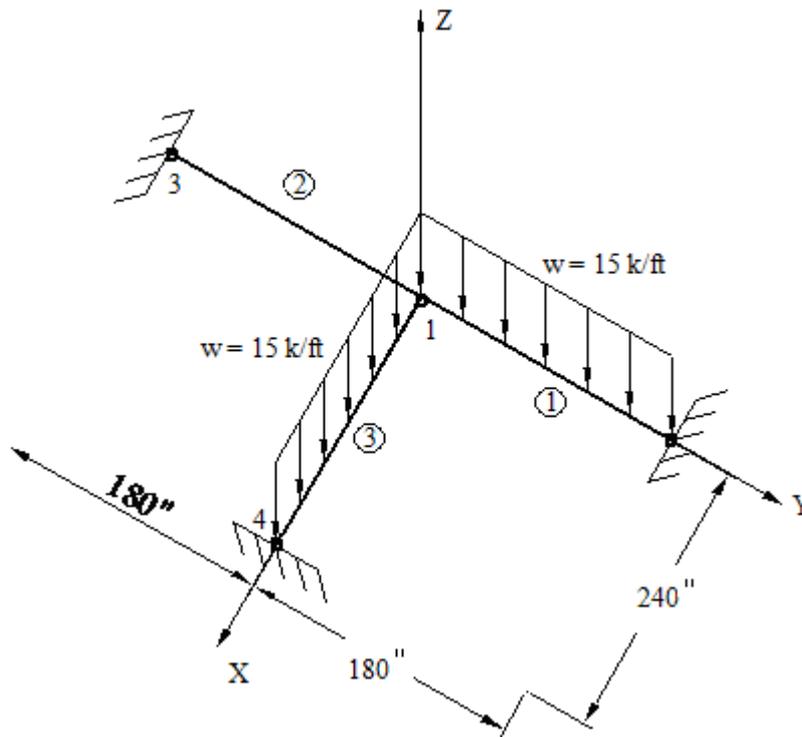


e.- Reacciones

Nodo	Reac. 1	Reac. 2	Reac. 3
2	0.68246E+07	-	0.30683E+05
3	0.53941E+06	-	0.69317E+05

5.6.6.- Ejemplo de estructura con elementos parrilla

La parrilla mostrada en la figura se analizó mediante el programa MEF1. FOR. Corrobore los resultados.



Para los tres elementos:

- $E = 29.0 \times 10^6$ psi
- $G = 11.2 \times 10^6$ psi
- $I_y = 700$ pulg⁴
- $I_x = 200$ pulg⁴

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS.....(NN)..... = 4

NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 3

NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO(NGLN) = 3
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE) = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN) = 2
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS(NNDP) = 3
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS(NNC) = 0
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS(NEC) = 2
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) = 5
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT) = 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.18000E+03
3	0.00000E+00	-0.18000E+03
4	0.24000E+03	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES		TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1
2	1	3	1
3	1	4	1

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E) = 0.29000E+08
 MODULO DE RIGIDEZ.....(G) = 0.11200E+08
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIX) = 0.20000E+03
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIY) = 0.70000E+03

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

=====

ELEM.	CAR.1	CAR.2	CAR.3
	CAR.4	CAR.5	CAR.6
1	0.00000E+00	-0.11250E+07	0.37500E+05
	0.00000E+00	0.11250E+07	0.37500E+05
3	0.00000E+00	-0.20000E+07	0.50000E+05
	0.00000E+00	0.20000E+07	0.50000E+05

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```
=====
```

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	-0.12342E-02	0.53591E-03	-0.85376E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

ELEMENTO: PARRILLA

```
=====
```

ELEM	NODO	MX	MY	FZ
1	1	0.6669E+04	0.2641E+07	-0.2801E+04
	2	-0.6669E+04	0.4613E+07	0.7780E+05
2	1	-0.6669E+04	0.2653E+07	-0.3102E+05
	3	0.6669E+04	0.2931E+07	0.3102E+05
3	1	-0.1152E+05	-0.1334E+05	0.3382E+05
	4	0.1152E+05	0.3896E+07	0.6618E+05

REACCIONES EN LOS APOYOS

```
=====
```

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
2	-0.46129E+07	-0.66692E+04	0.77801E+05
3	0.29311E+07	-0.66692E+04	0.31022E+05
4	0.11519E+05	0.38960E+07	0.66178E+05

5.7.- Elemento: Armadura Espacial

5.7.1.- Introducción

En el análisis de las armaduras espaciales se consideran las mismas hipótesis que en el caso de armaduras planas. Es decir, los elementos son rectos, las cargas aplican únicamente en los nodos, y los elementos están conectados en juntas de fricción. Estas suposiciones implican que cada elemento está sometido, únicamente, a carga axial; de tensión o de compresión.

La principal diferencia entre una armadura plana y una espacial, es el número de grados de libertad por nodo. Puesto que en el caso de una armadura espacial hay tres traslaciones posibles en cada nodo, cada elemento tendrá seis grados de libertad. Por lo tanto, la matriz local de rigidez de un elemento de armadura plana y la matriz de rotación asociadas, será de 6 x 6.

5.7.2.- Elemento de armadura espacial

En la Fig.5.21 se muestra un elemento de armadura espacial y el sistema local de referencia asociado.

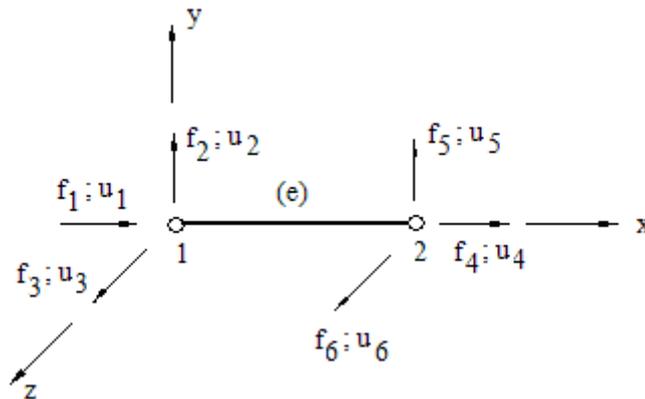


Fig.5.21. Elemento de armadura espacial asociado a su sistema local de referencia

La matriz de rigidez de este elemento se puede obtener directamente expandiendo, a tres dimensiones, la matriz local de rigidez del elemento de armadura plana, añadiendo, a ésta, dos filas y dos columnas, correspondiente a f_3 y f_6 , u_3 y u_6 , las cuales representarán las fuerzas y los desplazamientos en la tercera dimensión; es decir

$$[k] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

5.7.3.- Transformación de coordenadas

Como se recordará, para el caso de armaduras planas, la matriz de rotación $[R]$, viene dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Las sub matrices de 2 x 2 consisten en una colección de senos y cosenos; es decir son matrices de "cosenos directores". Cada elemento de estas matrices representa el coseno del ángulo entre los ejes locales y globales. Si se designan estos elementos por L_{ij} , donde i y j corresponden al

desplazamiento local u y el desplazamiento global U , respectivamente. Por ejemplo, en el caso bidimensional que se muestra en la Fig.5.22:

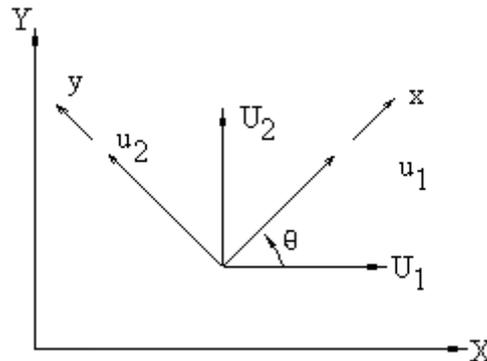


Fig.5.22. Cosenos directores para el caso bidimensional

L_{11} = coseno del ángulo entre u_1 y $U_1 = \cos(\theta)$.

L_{12} = coseno del ángulo entre u_1 y $U_2 = \text{sen}(\theta)$.

L_{21} = coseno del ángulo entre u_2 y $U_1 = -\text{sen}(\theta)$.

L_{22} = coseno del ángulo entre u_2 y $U_2 = \cos(\theta)$.

Expandiendo este razonamiento a tres dimensiones, se puede escribir:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Las transformaciones requeridas conducen a una matriz de rotación de 6 x 6 (2 Nodos / elemento x 3 grados de libertad / nodo). Luego:

$$[R] = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [0] & [L] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & 0 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ 0 & 0 & 0 & L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ 0 & 0 & 0 & L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

y, como siempre, la matriz local de rigidez, referida al sistema global, viene dada por:

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

es decir:

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} L_{11}^2 & L_{11}L_{12} & L_{13}L_{11} & -L_{11}^2 & -L_{11}L_{12} & -L_{13}L_{11} \\ & L_{12}^2 & L_{13}L_{12} & -L_{11}L_{12} & -L_{12}^2 & -L_{13}L_{12} \\ & & L_{13}^2 & -L_{11}L_{13} & -L_{12}L_{13} & -L_{13}^2 \\ & & & L_{11}^2 & L_{11}L_{12} & L_{11}L_{13} \\ \text{Simétrica} & & & & L_{12}^2 & L_{13}L_{12} \\ & & & & & L_{13}^2 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

Nótese que en la ecuación anterior, aparecen solamente los cosenos directores L_{11} , L_{12} y L_{13} , los cuales representan los cosenos de los ángulos entre u_1 (desplazamiento en la dirección del eje longitudinal del elemento) y las direcciones de los desplazamientos U_1 , U_2 y U_3 .

A continuación se ilustra el procedimiento para determinar estos tres cosenos directores. Considérese el vector \vec{AB} el cual se supone orientado a lo largo del eje longitudinal del elemento, y que se muestra en la siguiente Fig.5.23; \vec{n} es el vector unitario asociado a la dirección AB. Dicho vector puede representar, como en efecto lo podemos suponer, una fuerza o un desplazamiento en la dirección del mencionado eje del elemento.

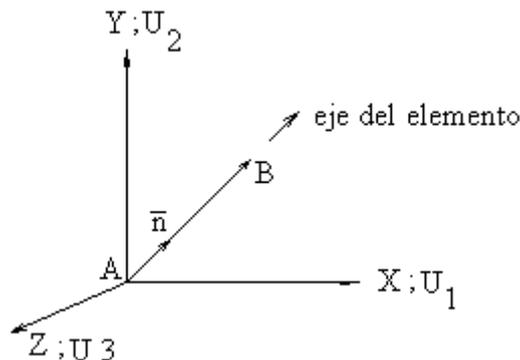


Fig.5.23. Vector a lo largo del eje de un elemento

Del álgebra vectorial:

$$(5.55)$$

$$(5.55)$$

$$(5.56)$$

donde n_x , n_y y n_z son L_{11} , L_{12} y L_{13} (cosenos directores de los ángulos entre el vector y los ejes coordenados). Luego:

$$\vec{AB} = (X_B - X_A)\vec{i} + (Y_B - Y_A)\vec{j} + (Z_B - Z_A)\vec{k} = AB\vec{n} \quad (5.57)$$

Donde, la diferencia en las coordenadas entre los puntos A y B permiten determinar las componentes del vector \vec{AB} y la magnitud de este vector se designa por AB y viene dada por:

$$AB = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} \quad (5.58)$$

De la ec. (5.56):

$$\vec{n} = \frac{(X_B - X_A)}{AB} \vec{i} + \frac{(Y_B - Y_A)}{AB} \vec{j} + \frac{(Z_B - Z_A)}{AB} \vec{k} \quad (5.59)$$

Comparando las ecs. (5.59) y (5.56), se llega a la conclusión:

$$L_{12} = n_y = \frac{Y_B - Y_A}{AB} \quad L_{13} = n_z = \frac{Z_B - Z_A}{AB} \quad (5.60)$$

Se puede notar que los cosenos directores se pueden determinar, muy fácilmente, a partir de la diferencia de las coordenadas de los puntos (nodos del elemento) A y B.

5.7.4.- Ejemplo 1 de una estructura de armadura espacial

Todos los elementos de la armadura espacial mostrada en la Fig.E.5.1a tienen están hechos del mismo material ($E=30.0 \times 10^6$ psi) y tienen la misma área de la sección transversal ($A=4 \text{ pu } \text{lg}^2$). Se desea analizar dicha armadura. Las fuerzas, en el nodo 5, son: $F_x=1.0$ kips , $F_y=2.0$ kips y $F_z=3.0$ kips

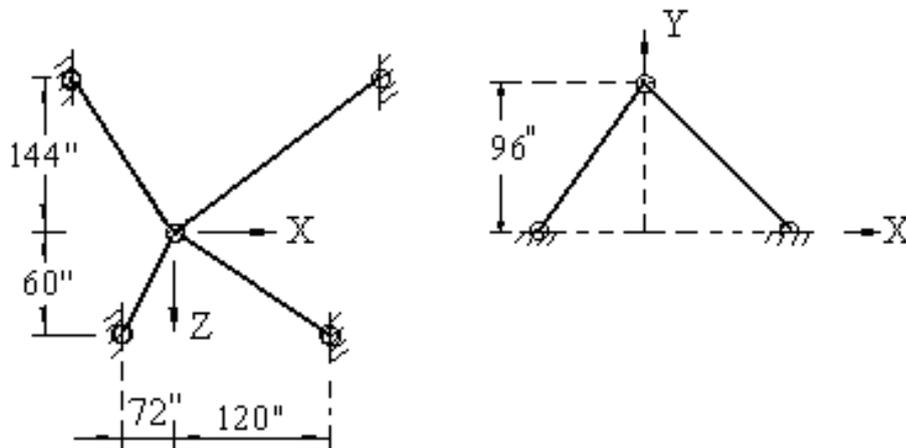


Fig.E.5.1a

a.- Discretización del dominio

La discretización asumida se muestra en la Fig.5.1.b

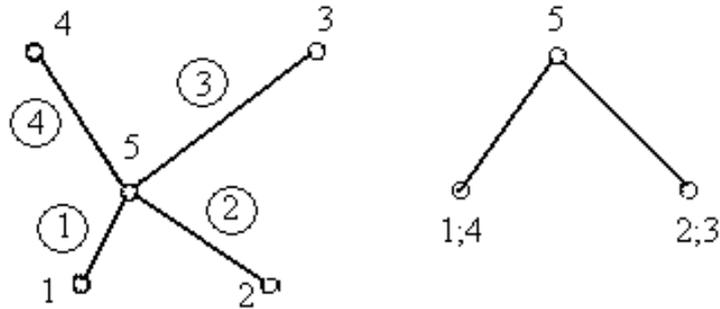


Fig.E.5.1.b

b.- Coordenadas e incidencias

Coordenadas nodales			
Nodo	X	Y	Z
1	-72.0	0.0	60.0
2	72.0	0.0	60.0
3	72.0	0.0	144.0
4	-72.0	0.0	144.0
5	0.0	96.0	0.0

Incidencias		
Elemento	Numeración local	Numeración global
1	1	5
	2	1
2	1	5
	2	2
3	1	5
	2	3
4	1	5
	2	4

c.- Cálculo de los cosenos directores

Elemento 1.

$$|L| = \sqrt{(72)^2 + (96)^2 + (60)^2} = 134.16 \text{ pu lg.}$$

$$L_{11} = \frac{-72.0}{134.16} = -0.5366 \quad ; \quad L_{12} = \frac{-96.0}{134.16} = -0.7155 \quad ;$$

$$L_{13} = \frac{60.0}{134.16} = -0.4472$$

Elemento 2.

$$|L| = \sqrt{(120)^2 + (96)^2 + (60)^2} = 165.0 \text{ pu lg.}$$

$$L_{11} = \frac{120.0}{165.0} = 0.7272 \quad ; \quad L_{12} = \frac{-96.0}{165.0} = -0.58181 \quad ;$$

$$L_{13} = \frac{60.0}{165.0} = 0.36363$$

Elemento 3.

$$|L| = \sqrt{(120)^2 + (96)^2 + (144)^2} = 210.6 \text{ pu lg.}$$

$$L_{11} = \frac{120.0}{210.6} = 0.5698 \quad ; \quad L_{12} = \frac{-96.0}{210.6} = -0.4558 \quad ;$$

$$L_{13} = \frac{-144.0}{210.6} = -0.6837$$

Elemento 4.

$$|L| = \sqrt{(72)^2 + (96)^2 + (144)^2} = 187.44 \text{ pu lg.}$$

$$L_{11} = \frac{72.0}{187.44} = -0.3841 \quad ; \quad L_{12} = \frac{-96.0}{187.44} = -0.5121 \quad ;$$

$$L_{13} = \frac{-144.0}{187.44} = -0.7682$$

d.- Condiciones de contorno

Nodo	Dir. 1	Dir. 2	Dir. 3
1	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0

De las condiciones de contorno se infiere que el nodo 5, es el único nodo que tiene desplazamiento distinto de cero. Para facilitar la solución manual de este problema, las incidencias se dieron de tal modo que el nodo 5, en todos los elementos, es el primer nodo de los mismos. De este modo sólo la submatriz superior izquierda de 3 x 3 de la matriz de rigidez local de cada elemento, con respecto al sistema global de referencia, dada por la ec.(5.55), contribuirá a la formación de la matriz global del sistema. Así:

Elemento 1:

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.258E+06 & 0.343E+06 & -0.215E+06 \\ 0.343E+06 & 0.458E+06 & -0.286E+06 \\ 0.215E+06 & -0.286E+06 & 0.179E+06 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.385E + 06 & -0.308E + 06 & 0.192E + 06 \\ 0.308E + 06 & 0.246E + 06 & -0.154E + 06 \\ 0.192E + 06 & -0.154E + 06 & 0.962E + 05 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

$$[K]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.185E + 06 & -0.148E + 06 & -0.222E + 06 \\ 0.148E + 06 & 0.118E + 06 & 0.178E + 06 \\ 0.222E + 06 & 0.178E + 06 & 0.266E + 06 \end{bmatrix}$$

Elemento 4:

$$[K]^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.945E + 05 & 0.126E + 06 & 0.189E + 06 \\ 0.126E + 06 & 0.168E + 06 & 0.252E + 06 \\ 0.189E + 06 & 0.252E + 06 & 0.378E + 06 \end{bmatrix}$$

Después ensamblaje de estas matrices en la matriz global del sistema, el sistema de ecuaciones resultante (una vez triangularizada la matriz del sistema), correspondiente a esta estructura es:

$$\begin{bmatrix} 0.922E + 06 & 0.135E + 05 & -0.553E + 05 \\ 0.0 & 0.990E + 06 & 0.107E + 05 \\ 0.0 & 0.0 & 0.916E + 06 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{13} \\ U_{14} \\ U_{15} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 3000 \end{Bmatrix}$$

En esta ecuación $U_{13}, U_{14},$ y U_{15} son las componentes del vector desplazamiento del nodo 5 de la estructura, en las direcciones X, Y y Z, respectivamente. La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$U_{13} = 0.0012514''; \quad U_{14} = 0.002020''; \quad U_{15} = 0.003275''$$

Las acciones de extremo de miembro se calculan, como ya se ha visto, mediante:

$$\{f\}^{(e)} = [k]^{(e)} [R]^{(e)} \{u\}^{(e)}$$

Las acciones de extremo de miembro se resumen en la Fig.5.1.c., se invita al lector a corroborar estos resultados

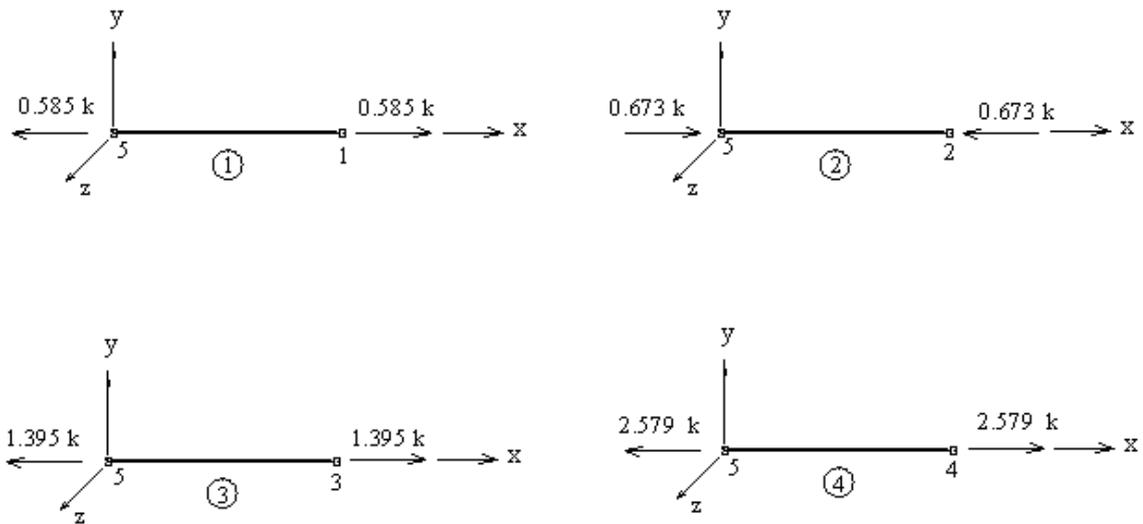


Fig.5.1.c

La solución de este problema se obtuvo, también, mediante el programa AER. Los resultados se muestran a continuación.

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS.....(NN).....	=	5
NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE).....	=	4
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO.....(NGLN).....	=	3
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO.....(NNPE).....	=	2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO.....(NCOPN).....	=	3
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP).....	=	4
NÚMERO DE NODOS CARGADOS.....(NNC).....	=	1
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS.....(NEC).....	=	0
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7).....	=	6
NÚMERO DE MATERIALES.....(NMAT).....	=	1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y	COOR. Z
1	-0.72000E+02	0.00000E+00	0.60000E+02
2	0.12000E+03	0.00000E+00	0.60000E+02
3	0.12000E+03	0.00000E+00	-0.14400E+03
4	-0.72000E+02	0.00000E+00	-0.14400E+03
5	0.00000E+00	0.96000E+02	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES		TIPO DE MATERIAL
1	5	1	1
2	5	2	1
3	5	3	1
4	5	4	1

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD..... (E)..... = 0.30000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL (AX)..... = 0.40000E+01

CARGAS EN LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
5	0.10000E+04	0.20000E+04	0.30000E+04

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.12566E-02	0.20382E-02	0.33626E-02

ELEMENTO: ARMADURA ESPACIAL

=====

ELEM	NODO	FX	FY	FZ
1	5	-0.5626E+03	0.0000E+00	0.0000E+00
	1	0.5626E+03	0.0000E+00	0.0000E+00
2	5	0.6918E+03	0.0000E+00	0.0000E+00

	2	-0.6918E+03	0.0000E+00	0.0000E+00
3	5	-0.1432E+04	0.0000E+00	0.0000E+00
	3	0.1432E+04	0.0000E+00	0.0000E+00
4	5	-0.2631E+04	0.0000E+00	0.0000E+00
	4	0.2631E+04	0.0000E+00	0.0000E+00

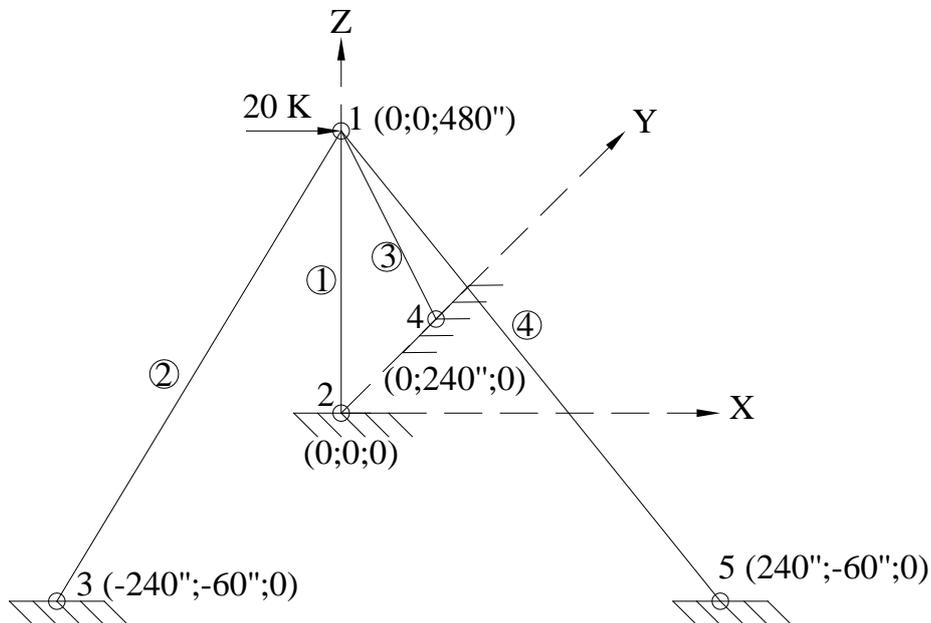
REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
1	-0.30190E+03	-0.40254E+03	0.25159E+03
2	-0.50317E+03	0.40254E+03	-0.25159E+03
3	0.81567E+03	-0.65254E+03	-0.97881E+03
4	-0.10106E+04	-0.13475E+04	-0.20212E+04

5.7.5.- Ejemplo 2 de una estructura de armadura espacial

Sea la torre de transmisión mostrada en la Figura. Si el área de la sección transversal de la torre es de 4 pulg² y la de los alambres es de 1.0 pulg². Determine los desplazamientos, las acciones de extremo de miembro y las reacciones de la estructura mediante el programa AER. Use $E = 29.0 \times 10^6$ psi.



Se anexa la solución obtenida mediante AER. Se invita al lector a comprobar que el equilibrio de fuerzas en los elementos, así como también en las reacciones.

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

```

=====
NÚMERO DE NODOS.....(NN)..... = 5
NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 4
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO .(NGLN)..... = 3
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO .....(NNPE)..... = 2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO .....(NCOPN)..... = 3
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 4
NÚMERO DE NODOS CARGADOS .....(NNC)..... = 1
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS .....(NEC)..... = 0
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7)..... = 6
NÚMERO DE MATERIALES .....(NMAT)..... = 2
    
```

COORDENADAS DE LOS NODOS

```

=====
      NODO      COOR. X      COOR. Y      COOR. Z
      1      0.00000E+00      0.00000E+00      0.48000E+03
      2      0.00000E+00      0.00000E+00      0.00000E+00
      3     -0.24000E+03     -0.60000E+02      0.00000E+00
      4      0.00000E+00      0.24000E+03      0.00000E+00
      5      0.24000E+03     -0.60000E+02      0.00000E+00
    
```

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```

=====
      ELEMENTO      NODOS CONCURRENTES      TIPO DE MATERIAL
      1              1 2              1
      2              1 3              2
      3              1 4              2
      4              1 5              2
    
```

CONDICIONES DE CONTORNO

```

=====
      NODO      DIR.1      DIR.2      DIR.3
      2      0.00000E+00      0.00000E+00      0.00000E+00
      3      0.00000E+00      0.00000E+00      0.00000E+00
      4      0.00000E+00      0.00000E+00      0.00000E+00
      5      0.00000E+00      0.00000E+00      0.00000E+00
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL .....(AX)..... = 0.40000E+01
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 2

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
    
```

AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL (AX)..... = 0.10000E+01

CARGAS EN LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.20000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.94267E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

ELEMENTO: ARMADURA ESPACIAL

=====

ELEM	NODO	FX	FY	FZ
1	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
	2	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	1	-0.2250E+05	0.0000E+00	0.0000E+00
	3	0.2250E+05	0.0000E+00	0.0000E+00
3	1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
	4	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
4	1	0.2250E+05	0.0000E+00	0.0000E+00
	5	-0.2250E+05	0.0000E+00	0.0000E+00

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
2	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	-0.10000E+05	-0.25000E+04	-0.20000E+05
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	-0.10000E+05	0.25000E+04	0.20000E+05

5.8.- Elemento: Pórticos Espacial

5.8.1.-Introducción

El elemento pórtico plano es el más complejo que se puede deducir utilizando, apenas, las teorías básicas de la mecánica de materiales y del análisis estructural. En la siguiente presentación se asume, igual que en el caso de pórticos planos, que las juntas de los elementos son rígidas. Adicionalmente se asume, también, que los elementos tienen simetría biaxial; es decir, la sección transversal es simétrica alrededor de los ejes y y z locales.

Para describir los desplazamientos de un nodo de un elemento de pórtico espacial, se necesita especificar tres traslaciones (u , v y w , en las direcciones x , y , z , respectivamente), y tres rotaciones (dos rotaciones de flexión alrededor de y , y z , y una rotación de torsión alrededor de x). Luego, un elemento de pórtico espacial tendrá seis grados de libertad por nodo y la matriz de rigidez de este elemento será, por lo tanto, de 12×12 .

Extendiendo la numeración de las fuerzas y los desplazamientos usada en los elementos previamente considerados, se numerarán las fuerzas y los desplazamientos del 1 al 6 en el nodo de la izquierda del elemento, y de 7 a 12 en el nodo de la derecha del mismo.

5.8.2.- Matriz de local de rigidez del elemento de pórtico espacial

La matriz local de rigidez del elemento de pórtico espacial puede deducirse fácilmente a partir de las matrices locales de rigidez de los elementos de pórticos planos y de parrilla previamente deducidos.

En la siguiente Fig.5.24, se muestra un elemento de pórtico espacial y el sistema local de referencia asociado.

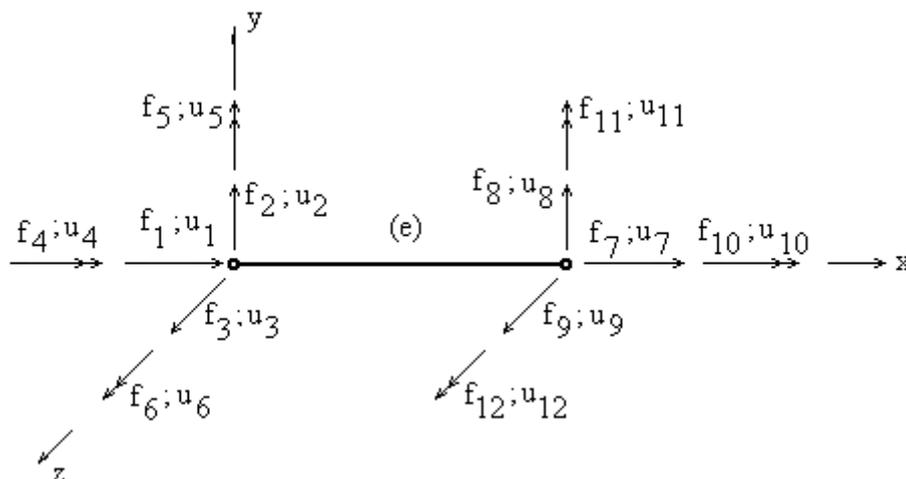


Fig.5.24. Elemento pórtico espacial asociado al sistema local de referencia

De igual modo que en el caso del elemento pórtico plano y del elemento de parrilla, en este caso, los efectos axiales y torsores también están desacoplados de la flexión.

Así, utilizando los resultados anteriores y tomando en consideración la numeración local de las direcciones de este elemento, la matriz local de rigidez del elemento de pórtico espacial, viene dada por:

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ & & & & & & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{SIMÉTRICA} & & & & & & & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ & & & & & & & & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ & & & & & & & & & \frac{GI_x}{L} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ & & & & & & & & & & & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

5.8.3.- Transformación de coordenadas

Como en los casos previos, es necesario transformar la matriz local de rigidez desde el sistema local al sistema global de referencia. Esta transformación, como ya quedó establecido, viene dada por:

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

En la sección 5.6.3 se reconocieron los elementos de la matriz de rotación $[R]$ como los cosenos directores de los vectores de fuerza y desplazamiento. Para el caso de pórticos tridimensional es, esta matriz se puede obtener expandiéndola de la siguiente forma:

$$[R] = \begin{bmatrix} [L] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [L] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [L] & \\ 0 & 0 & 0 & [L] \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

donde cada sub matriz $[L]$ es una matriz de cosenos directores de 3 x 3.

La forma de la matriz de rotación $[R]$, como ya se estudió, depende de la orientación particular de los ejes locales asociados a un elemento dado. En muchos casos, un elemento de un pórtico plano estará orientado para que los ejes principales de la sección transversal estén en los planos horizontales y verticales (por ejemplo, una viga I con su alma en el plano vertical). Bajo estas condiciones los ejes locales \hat{y} y \hat{z} se pueden seleccionar exactamente igual que para un elemento de una armadura espacial, y la matriz de rotación dada por la ec. () también puede ser usada para un elemento de un pórtico espacial.

Existen otros dos casos en los que un elemento de un pórtico espacial tiene dos ejes de simetría en la sección transversal y el mismo momento de inercia respecto de cada eje (por ejemplo, un elemento circular o cuadrado, ya sea tubular o sólido). En tales casos, los ejes \hat{y} y \hat{z} , nuevamente pueden ser seleccionados como se describió anteriormente. Se puede hacer esta selección debido a que todos los ejes de la sección transversal son ejes principales de inercia, y cualquier par de ejes puede ser seleccionados para \hat{y} y \hat{z} . En general, sin embargo, un elemento de un pórtico espacial puede tener sus ejes principales \hat{y} y \hat{z} en direcciones oblicuas, tal como se muestra en la Fig.5.25a. Hay varias formas en las que se puede especificar la posición de estos ejes. En esta sección se describirá dos métodos de hacerlo.

El primer método consiste en especificar la orientación de los ejes principales mediante el ángulo de giro respecto del eje \hat{x} . Con la finalidad de visualizar cómo se mide dicho ángulo, considérese las tres rotaciones sucesivas de los ejes globales de la estructura con respecto a los ejes locales del elemento mostrado en la Fig.5.26. Las primeras dos rotaciones a través de los ángulos β y γ (respecto de los ejes \hat{y}_β y \hat{z}_γ (respectivamente), son exactamente las mismas que las mostradas en la Fig. (OJO). La tercera transformación consiste en una rotación a través del ángulo α respecto del eje \hat{x}_m , causando que los ejes \hat{y} y \hat{z} coincidan con los ejes principales de la sección transversal. Esta última rotación también se indica en la Fig.(OJO), que muestra una vista de la sección transversal del elemento viendo en el sentido negativo de \hat{x} . El plano $\hat{x}-\hat{x}_\gamma$ es un plano vertical a través del eje del elemento, y el ángulo α se mide en sentido (en sentido positivo), desde ese plano a uno de los ejes principales de la sección transversal.

La rotación de ejes a través del ángulo α requiere la introducción de la matriz de rotación $[R_\alpha]$ en la que los elementos de ésta son los cosenos directores de los ejes finales ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$), con relación al eje γ :

$$[R_\alpha] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Multiplicando el producto $[R_\gamma][R_\beta]$

A continuación se procederá a determinar las expresiones que permitirán calcularlos.

En forma general, los cosenos directores se calculan a partir de las coordenadas de tres puntos; dos de esos puntos son los nodos de los elementos, y el tercer punto está situado en el plano local x-y y, en las referencias bibliográficas, muchas veces es rotulado como el nodo **k**. En la Fig.5.25 se muestran estos tres puntos. Como ya se ha visto, los cosenos directores son los cosenos de los ángulos entre los ejes de coordenadas locales y ejes de coordenadas globales. Por ejemplo, L_{23} es el coseno del ángulo entre el eje local y y el eje global z.

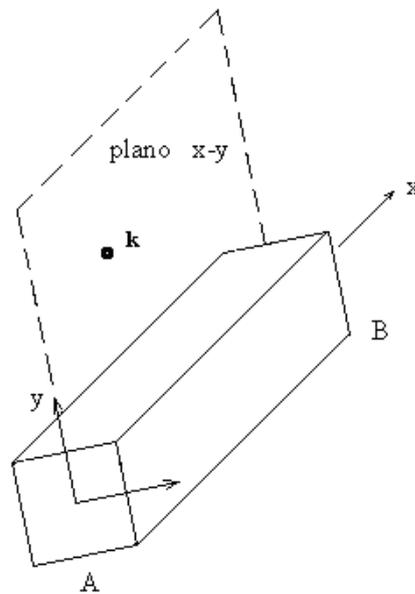


Fig.5.25. Localización del nodo k

Si se designan los nodos de los extremos del elemento como A y B, se tendrá, como en el caso del elemento de armadura espacial:

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= \frac{X_B - X_A}{AB} & ; & & L_{12} &= \frac{Y_B - Y_A}{AB} & ; \\
 L_{13} &= \frac{Z_B - Z_A}{AB} & & & & & (5.63)
 \end{aligned}$$

donde AB representa la longitud del elemento.

Los cosenos directores del eje local z pueden determinarse tomando en consideración que cualquier vector \bar{Z} paralelo al eje local z debe ser perpendicular al plano formado por dos vectores en el plano local x-y. Uno de estos vectores puede ser el vector \bar{X} que une a A con B, y el otro vector \bar{K} que une el punto A con el punto k, tal como se muestra en la Fig.5.26. El producto vectorial de estos dos vectores produce un vector perpendicular al plano x-y. La división de este vector entre su longitud, es igual al vector unitario cuyas componentes permitirán calcular los cosenos directores entre el eje local z y los ejes globales.

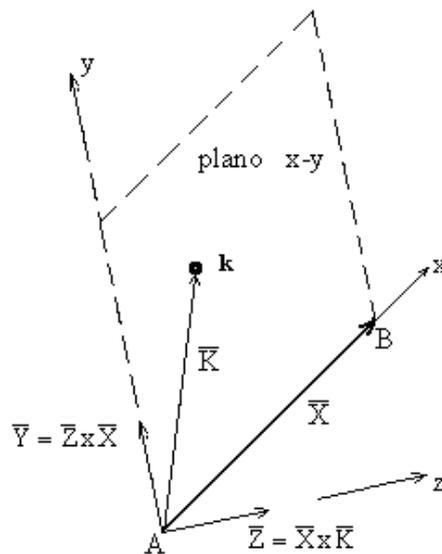


Fig.5.26 Producto vectorial

Los vectores \bar{X} y \bar{K} , se escribe:

$$\bar{X} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} \quad (6.64a)$$

$$\bar{K} = (x_k - x_A)\vec{i} + (y_k - y_A)\vec{j} + (z_k - z_A)\vec{k} \quad (6.64b)$$

Haciendo el producto vectorial $\bar{Z} = \bar{X} \times \bar{K}$, se obtienen las siguientes componentes:

$$Z_x = (y_B - y_A)(z_k - z_A) - (z_B - z_A)(y_k - y_A) \quad (6.65a)$$

$$Z_y = (z_B - z_A)(x_k - x_A) - (x_B - x_A)(z_k - z_A) \quad (6.65b)$$

$$Z_z = (x_B - x_A)(y_k - y_A) - (y_B - y_A)(x_k - x_A) \quad (6.65c)$$

Luego, los cosenos directores buscados son:

$$L_{31} = \frac{Z_x}{Z} \quad ; \quad L_{32} = \frac{Z_y}{Z} \quad ; \quad L_{33} = \frac{Z_z}{Z} \quad (6.66)$$

donde:

$$Z = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + Z_z^2} \quad (6.67)$$

De igual modo el producto vectorial entre el vector que está en la dirección del eje z y el vector en la dirección del eje x da como resultado un vector en la dirección del eje y. El vector en la dirección del eje z viene dado por: $L_{31}\vec{i} + L_{32}\vec{j} + L_{33}\vec{k}$, y el vector en la dirección del eje x viene dado por

$L_{11} \bar{i} + L_{12} \bar{j} + L_{13} \bar{k}$. Formando el producto vectorial $\bar{Z}_x \bar{X}$ se llega a las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} Y_x &= L_{13} L_{32} - L_{12} L_{33} & ; & \quad Y_y = L_{11} L_{33} - L_{13} L_{31} ; \\ Y_z &= L_{12} L_{31} - L_{11} L_{32} \end{aligned} \quad (6.68)$$

donde:

$$\begin{aligned} L_{21} &= \frac{Y_x}{Y} & ; & \quad L_{22} = \frac{Y_y}{Y} & ; \\ L_{23} &= \frac{Y_z}{Y} \end{aligned} \quad (6.69)$$

Y

$$Y = \sqrt{Y_x^2 + Y_y^2 + Y_z^2} \quad (6.70)$$

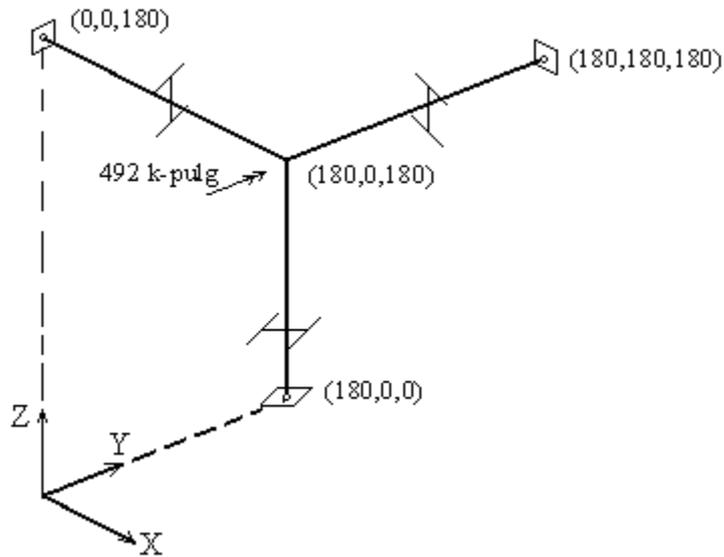
Nótese que la dirección positiva del eje local y siempre será perpendicular al eje local x, en la dirección del nodo **k**.

Una vez determinados todos los elementos de la matriz $[L]$ se forma la matriz de rotación $[R]$ del elemento de pórtico espacial y la matriz local de rigidez del elemento con respecto al sistema global de referencia se calcula, como siempre por;

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

5.8.4.- Ejemplo de estructura de pórtico espacial

Se desea analizar la estructura de pórtico espacial mostrada en la Fig.E7.1. Todos los elementos están constituidos por un perfil W8x24 de acero; $A_x = 7.08 \text{ pu lg}^2$, $I_x = J = 0.35 \text{ pu lg}^2$, $I_y = 0.18.3 \text{ pu lg}^2$, $I_z = 82.8 \text{ pu lg}^2$, $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$, $G = 11.15 \text{ psi}$. La longitud de todos los elementos es: $L = 180''$.



E.5.7.1. Pórtico espacial.

a.- Discretización del dominio

La estructura se discretizó de la forma mostrada en la Fig.E.5.7.2

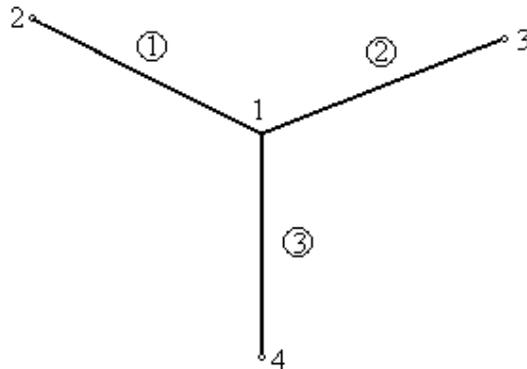


Fig.E5.7.2. Discretización de la estructura

b.- Coordenadas e incidencias

Coordenadas nodales			
Nodo	X	Y	Z
1	18.0	0.0	180.0
2	0.0	0.0	180.0
3	180.0	180.0	180.0
4	180.0	0.0	-0.0

Incidencias		
Elemento	Numeración local	Numeración global
1	1	1
	2	2
2	1	1
	2	3
3	1	1
	2	4

c.- Cálculo de los cosenos directores

Para facilitar la solución manual de esta estructura las incidencias, se consideró el nodo 1 como el nodo del extremo izquierdo de cada elemento. En la Fig.E.5.7.3 se muestran, para cada elemento, las coordenadas del nodo **k**. Nótese que el nodo **k** asociado a cada elemento está localizado en su plano x-y.

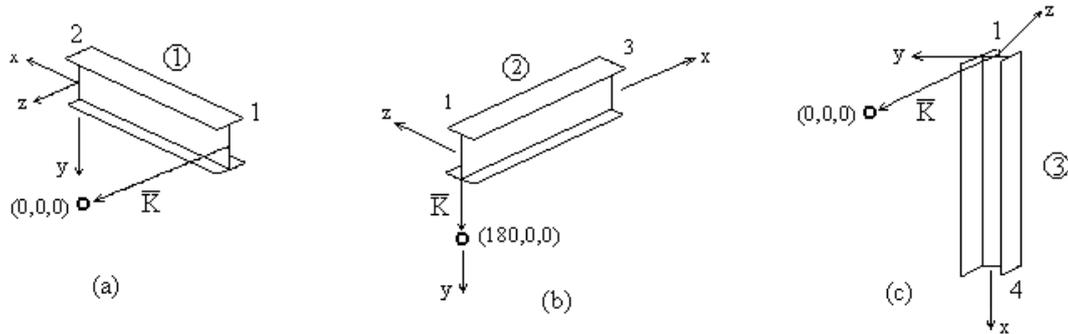


Fig.5.7.3. Vector \bar{K} para los elementos de la estructura

Como ejemplo de la selección de los nodos **k**, se considerará el elemento 1: puesto que el nodo 1 es el nodo del extremo izquierdo de este elemento, el eje local x coincide con el eje longitudinal de dicho elemento, y su sentido es desde el nodo 1 hacia el nodo 2. La posición del nodo **k** se selecciona de tal modo que coincida con el plano del alma de la viga del elemento, y el vector \bar{K} esté dirigido desde el nodo 1 hacia el nodo seleccionado. En este caso, el nodo **k** seleccionado tiene coordenadas (0,0,0). El eje local y siempre será perpendicular al eje local x, y su sentido positivo apunta hacia el nodo **k**, tal como se muestra en la Fig.5.7.3a. El sentido positivo del eje local z se determina aplicando la regla de la mano derecha.

Ahora ya es posible calcular los cosenos directores de cada elemento. El extremo izquierdo de cada elemento es el punto A, luego, para cada elemento: $X_A = x_1, Y_A = y_1, Z_A = z_1$, y por lo tanto.

Elemento 1:

$X_A = 180$	$X_B = 0$	$X_k = 0$
$Y_A = 0$	$Y_B = 0$	$Y_k = 0$
$Z_A = 180$	$Z_B = 180$	$Z_k = 0$

$$AB = \sqrt{(0-180)^2 + 0 + 0} = 180$$

$$L_{11} = \frac{(0-180)}{180} = -1$$

$$L_{12} = L_{13} = 0$$

De las ecs.(6.65):

$$Z_x = (0)(0 - 180) - (0)(0) = 0$$

$$Z_y = (0)(180 - 0) - (0 - 180)(0 - 180) = - (180)^2$$

$$Z_z = (0 - 180)(0) - (0)(0 - 180) = 0$$

$$Z = (180)^2$$

luego:

$$L_{31} = 0$$

$$L_{32} = -1$$

$$L_{33} = 0$$

de las ecs.(6.68):

$$Y_x = 0 - 0 = 0$$

$$Y_y = -1(0) - 0 = 0$$

$$Y_z = 0 - (-1)(-1) = -1$$

y por lo tanto:

$$L_{21} = 0$$

$$L_{22} = -1$$

$$L_{23} = -1$$

finalmente, la matriz $[L]$ viene dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$X_A = 180$$

$$X_B = 180$$

$$X_k = 180$$

$$Y_A = 0$$

$$Y_B = 180$$

$$Y_k = 0$$

$$Z_A = 180$$

$$Z_B = 180$$

$$Z_k = 0$$

$$AB = \sqrt{(180 - 180)^2 + (180 - 0)^2 + (180 - 180)^2} = 180$$

$$L_{11} = \frac{(180 - 180)}{180} = 0$$

$$L_{12} = \frac{(180 - 0)}{180} = 1$$

$$L_{13} = \frac{(180 - 180)}{180} = 0$$

De las ecs.(6.65):

$$Z_x = (180)(-180) - (0) = - (180)^2$$

$$Z_y = 0 - 0 = 0$$

$$Z_z = 0 - 0 = 0$$

$$Z = (180)^2$$

luego:

$$L_{31} = \frac{-(180)^2}{(180)^2} = -1$$

$$L_{32} = 0$$

$$L_{33} = 0$$

de las ecs.(6.68):

$$Y_x = 0 - 0 = 0$$

$$Y_y = 0 - 0 = 0$$

$$Y_z = 1(-1) - 0 = -1$$

y por lo tanto:

$$L_{21} = 0$$

$$L_{22} = 0$$

$$L_{23} = -1$$

finalmente, la matriz $[L]$ viene dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

$$X_A = 180$$

$$X_B = 180$$

$$X_k = 0$$

$$Y_A = 0$$

$$Y_B = 0$$

$$Y_k = 0$$

$$Z_A = 180$$

$$Z_B = 0$$

$$Z_k = 0$$

$$AB = \sqrt{(180-180)^2 + (0-0)^2 + (0-180)^2} = 180$$

$$L_{11} = \frac{(0-0)}{180} = 0$$

$$L_{12} = \frac{(0-0)}{180} = 0$$

$$L_{13} = \frac{(0-180)}{180} = -1$$

De las ecs.(6.65):

$$Z_x = 0 - 0 = 0$$

$$Z_y = -180(-180) - 0 = (180)^2$$

$$Z_z = 0 - 0 = 0$$

$$Z = (180)^2$$

luego:

$$L_{31} = \frac{0}{(180)^2} = 0$$

$$L_3 = \frac{(180)^2}{(180)^2} = 1$$

$$L_{33} = \frac{0}{(180)^2} = 0$$

de las ecs.(6.68):

$$Y_x = -1 - 0 = -1$$

$$Y_y = 0 - 0 = 0$$

$$Y_z = 0 - 0 = 0$$

y por lo tanto:

$$L_{21} = -1$$

$$L_{22} = 0$$

$$L_{23} = 0$$

finalmente, la matriz $[L]$ viene dada por:

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Puesto que solamente el nodo 1 tiene desplazamiento distinto de cero y que también, debido a las incidencias establecidas, representa el nodo uno de cada uno de los elementos de la estructura, para analizar la estructura, únicamente se requiere la sub-matriz de 6 x 6 de la parte superior izquierda de la matriz de cada elemento.

Luego:

Elemento1:

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.114E+07 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.494E+04 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.445E+06 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.109E+04 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.217E+05 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 & 0.118E+08 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.534E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

$$[K]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.114E+07 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.494E+04 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.445E+06 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.109E+04 & 0.000E+00 & 0.983E+05 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.217E+05 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.983E+05 & 0.000E+00 & 0.118E+08 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & -0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.534E+08 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.114E+07 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.494E+04 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.445E+06 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.109E+04 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.217E+05 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 & 0.118E+08 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.534E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

$$[K]^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.109E+04 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.494E+04 & 0.000E+00 & 0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.114E+07 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.534E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ -0.983E+05 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.118E+08 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.217E+05 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

$$[k]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.114E+07 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.494E+04 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.445E+06 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.109E+04 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.217E+05 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.000E+00 & 0.118E+08 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.534E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K] = [R]^T [k] [R]$$

$$[K]^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.494E+04 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.445E+06 \\ 0.000E+00 & 0.114E+07 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.109E+04 & -0.983E+05 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & -0.983E+05 & 0.118E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.217E+05 & 0.000E+00 \\ 0.445E+06 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.000E+00 & 0.534E+08 \end{bmatrix}$$

VI.- TÓPICOS ESPECIALES EN EL ANÁLISIS ESTRUCTURAL

6.1.- Introducción

En este capítulo se presentarán algunos tópicos especiales que aparecen, muy frecuentemente, en el análisis estructural. Se analizarán los efectos térmicos y los que se derivan de los errores de fabricación (longitud incorrecta de algún elemento). De igual modo se considerará posibilidad de combinar diferentes tipos de elementos en el análisis de una estructura dada y, también, la forma de incluir apoyos elásticos en los soportes de la misma. Así mismo se estudiará la forma de analizar estructuras cuyos apoyos estén inclinados con relación al sistema global de referencia.

6.2.- Efectos térmicos

Los esfuerzos que se generan en una estructura debido a los cambios de temperatura en los elementos que la conforman pueden llegar, en algunos casos, a superar los esfuerzos producidos por las cargas externas. El transporte de crudo en la industria petrolera es un buen ejemplo de esta situación. En esta sección se estudiará la forma de incluir los efectos térmicos en el análisis matricial de estructuras.

6.2.a.-Elementos axiales

Cuando existe un cambio de temperatura sobre un elemento unidimensional, se origina una deformación unitaria axial, linealmente proporcional a dicha temperatura. Esta deformación axial viene dada por:

$$\varepsilon_T = \alpha (\Delta T) \quad (6.1)$$

donde α es el coeficiente de dilatación térmica ($1/^\circ\text{C}$ o $1/^\circ\text{F}$), y ΔT es el cambio de temperatura. Si el elemento tiene una longitud L , el cambio total de longitud del mismo, debido al cambio de temperatura es:

$$\Delta L = \varepsilon_T L = \alpha (\Delta T)L \quad (6.2)$$

Los efectos térmicos se tratan del mismo modo que fueron tratados los casos de cargas aplicadas sobre los elementos; es decir, hay que determinar el respectivo vector de cargas nodales equivalentes. Como en esos casos, las

fuerzas nodales equivalentes debido a un cambio de temperatura, son de la misma magnitud que las fuerzas de extremo fijo, pero de sentido opuesto. En la Fig.6.1 se muestran estas fuerzas.

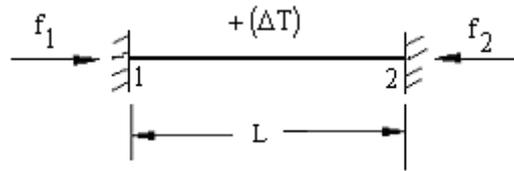


Fig.6.1 Acciones de extremo de miembro fijo debido a un cambio de temperatura

Debido al cambio de temperatura el elemento está sometido a carga axial, luego el esfuerzo que se genera en el mismo viene dado por:

$$\sigma = \frac{P}{A} \quad (6.3)$$

donde P es la carga axial y A es el área de la sección transversal del elemento. Pero, dentro del intervalo elástico lineal del material se verifica que:

$$\sigma = E \varepsilon_T = E \alpha (\Delta T) \quad (6.4)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material del elemento. Igualando las ecs.(6.3) y (6.4), se obtiene:

$$P = E A \alpha (\Delta T) \quad (6.5)$$

Del equilibrio estático del elemento mostrado en la Fig.6.1, se obtiene:

$$P = f_1 = E A \alpha (\Delta T) = -f_2 \quad (6.6)$$

y por lo tanto, el vector de cargas nodales equivalente viene dado por:

$$f_T = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = E A \alpha (\Delta T) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (6.7)$$

Ejemplo 6.1

Se desea determinar analizar la estructura mostrada en la Fig.E.6.1a. Supóngase que adicionalmente a la carga aplicada en el nodo 2, el elemento 2 sufre un incremento de temperatura de 60°F. La barra de es uniforme con $A = 2 \text{ pu l}g^2$; $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$; $\alpha = 6.5 \times 10^{-6} / ^\circ F$.

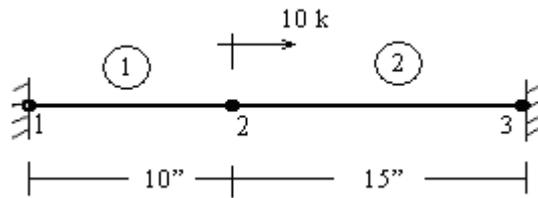


Fig.E.6.1a. Estructura sometida a cambio de temperatura

Las acciones de extremo de miembro fijo para el elemento 2 debido al cambio de temperatura son:

$$f_T = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = (29 \times 10^6) (2) (6.5 \times 10^{-6}) (60) \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} = 22620 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

las cuales se muestran en la Fig.E.6.1b. Luego, al vector de cargas nodales equivalentes del elemento 2 asociado al cambio de temperatura, se le debe superponer la carga de 10 k que está aplicada directamente en el nodo 2

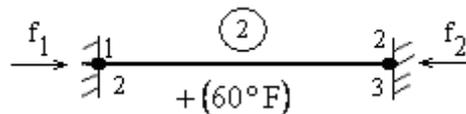


Fig.E.6.1b. Acciones de extremo de miembro fijo del elemento 2

Luego, al vector de cargas nodales equivalentes del elemento 2 asociado al cambio de temperatura, se le debe superponer la carga de 10 k que está aplicada directamente en el nodo 2: El resultado se resume en la Fig.E.6.1c.

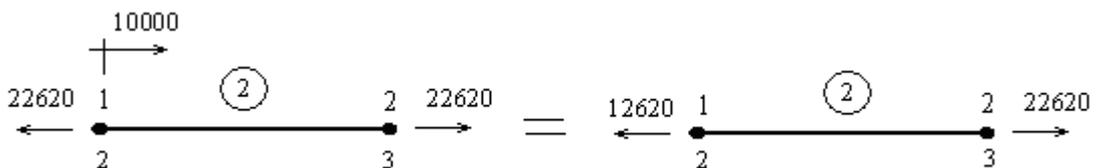


Fig.6.1c. Vector de cargas del elemento 2

Las relaciones fuerza - desplazamiento de los elementos de la estructura son:

$$\frac{AE}{L} \Big|_{(1)} = \frac{(2)(29 \times 10^6)}{10} = 5.8 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}}$$

$$\frac{AE}{L} \Big|_{(2)} = \frac{(2)(29 \times 10^6)}{15} = 3.866 \times 10^6 \frac{\text{lb}}{\text{pulg}}$$

Para el elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = 5.8 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = 3.866 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

De acuerdo con la numeración global del sistema, la matriz global del mismo es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -12620 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 5.8 & -5.8 & 0 \\ -5.8 & 9.666 & -3.866 \\ 0 & -3.866 & 3.866 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

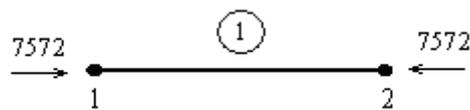
Introduciendo las condiciones de contorno

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -12620 \\ 0 \end{Bmatrix} = 10^6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9.666 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

La solución es: $U_1 = U_3 = 0$ y $U_2 = -1.3056 \times 10^{-3}$ pulg. Las acciones de extremo de miembro son:

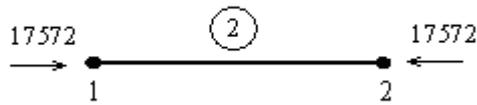
Elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \end{Bmatrix} = 5.8 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1.3056 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7572 \\ -7572 \end{Bmatrix} \text{ lbs}$$



Elemento 2:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \end{Bmatrix} = 3.866 \times 10^6 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1.3056 \times 10^{-3} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 17572 \\ -17572 \end{Bmatrix} \text{ lbs}$$



Las fuerzas globales son:

$$F_1 = f_1^{(1)} = 7572 \text{ lbs}; \quad F_2 = f_2^{(1)} + f_1^{(2)} = -7572 + 17572 = 10000 \text{ lbs}; \quad F_3 = f_2^{(2)} = -17572 \text{ lbs}$$

6.2.b.-Elementos de viga y pórticos

Para ilustrar el procedimiento de evaluar los efectos térmicos en vigas y en pórticos (planos o espaciales), considérese la viga con dos planos de simetría mostrada en la Fig.6.2.a. Se supone que la viga tiene un momento de inercia igual a I_z , un módulo de elasticidad igual a E y tiene una altura h .

Se supone que la superficie superior de la viga está sujeta a una temperatura constante igual a T_1 , y la superficie inferior a una temperatura, también constante, igual a T_2 , con un gradiente de temperatura lineal igual a $\Delta T = (T_1 - T_2)$ entre las dos superficies. Si la viga es libre de expandirse, el eje longitudinal de la misma se expandirá una longitud igual a $\alpha L(T_1 + T_2)/2$ y, adicionalmente, la viga se reflectará en un arco circular, tal como se muestra en la Fig.6.2.b.

Las fuerzas de extremo fijo necesarias para suprimir la expansión longitudinal, se determinan de la misma forma que en el caso de los elementos axiales sometidos a cambios de temperatura; es decir, tal como se ilustra en la Fig.6.1.

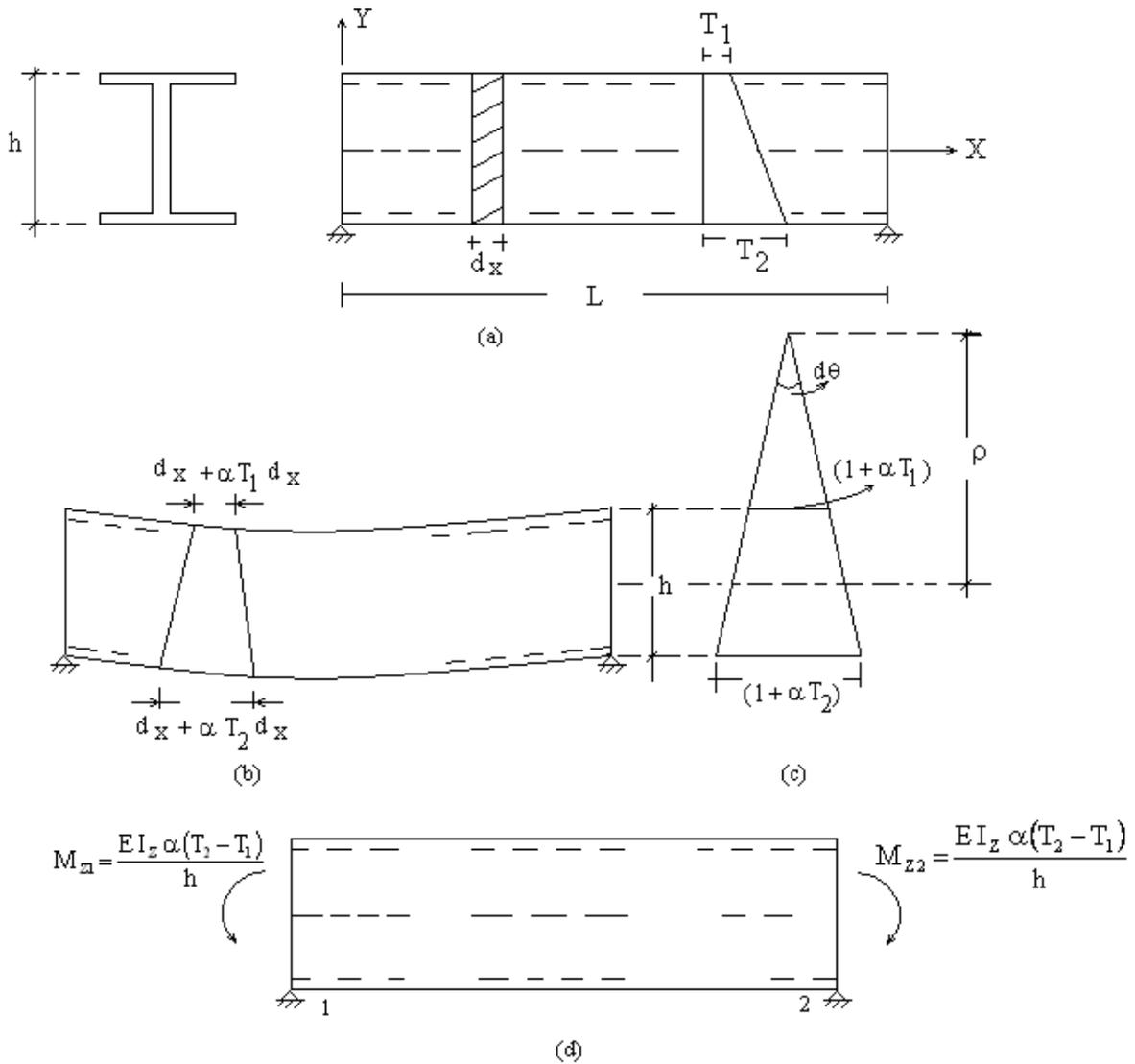


Fig.6.2. Gradiente térmico a través de una viga

Por lo tanto sigue siendo válida la ec.(6.5), pero ahora $\Delta T = (T_1 + T_2)/2$; es decir:

$$P = EA\alpha \left(\frac{T_1 + T_2}{2} \right) \quad (6.8)$$

Debido a la curvatura de la viga, también será necesario determinar las acciones de extremo fijo que restrinja dicha curvatura. Para tal fin, considérese la curvatura térmica de un elemento de longitud inicial igual dx , el cual puede expandirse libremente. Dicho elemento, deformado, se muestra en la fig.6.2.c. El cambio del ángulo entre las dos secciones inicialmente perpendiculares al eje longitudinal viene dado por:

$$d\theta = \frac{\alpha(T_1 - T_2)dx}{h} \quad (6.9)$$

o

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} \quad (6.10)$$

Despreciando, como usualmente se hace, los términos de orden superior, la curvatura de la sección viene dada por: $d\theta/dx = 1/\rho$. Luego:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\alpha(T_1 - T_2)}{h} \quad (6.11)$$

Puesto que la curvatura es constante, la viga se deforma en un arco circular. Para restringir dicha curvatura se necesita, simplemente, añadir los momentos de extremo fijo que se muestra en la Fig.6.2.d.. De la mecánica de materiales se sabe que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (6.12)$$

De las ecs.(6.11) y (6.12), se obtienen los momentos de extremo fijo (con los signos apropiados), mostrados en la Fig.6.2.d, los cuales viene dados por:

$$M_{z1} = M_{z2} = \frac{EI_z \alpha (T_2 - T_1)}{h} \quad (6.13)$$

Ejemplo 2

Se desea analizar la viga mostrada en la Fig.6.2a, es calentada en la cara superior a 20°C, y en la cara inferior a 10°C, con un gradiente uniforme de temperatura uniforme entre las dos caras. Para toda la viga: $E=200\text{Gpa}$, $\alpha=1.2 \times 10^{-5} 1/^\circ\text{C}$. Para el segmento AB: $I_z=200 \times 10^6 \text{ mm}^2$, $h=400 \text{ mm}$ y para el segmento BC: $I_z=50 \times 10^6 \text{ mm}^2$, $h=200 \text{ mm}$.

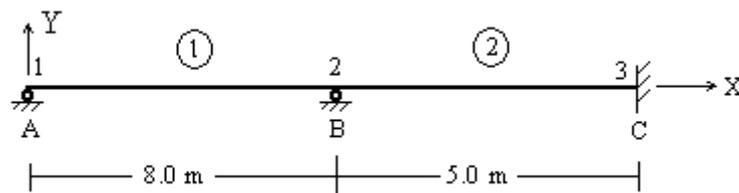


Fig.6.2a. Viga sometida a efectos térmicos

En la Fig.6.2b se muestra el gradiente de temperatura que actúa sobre la viga:

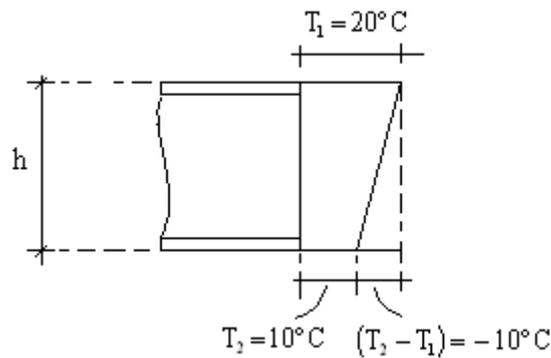


Fig.6.2b. Gradiente de temperatura en la viga

Como se puede apreciar en la Fig.6.2a, la viga fue discretizada en dos elementos. El vector de cargas de extremos fijo para los elementos es:

Elemento 1

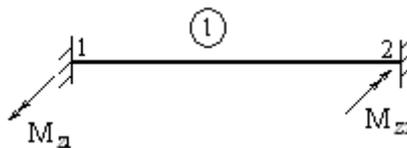


Fig.6.2c. Acciones de extremo de miembro del elemento 1

$$M_{z1} = -M_{z2} = \frac{(200 \times 10^9) (200 \times 10^6) (1.2 \times 10^{-5}) (-10)}{0.400} = -12.0 \times 10^3 \text{ KN-mm}$$

Elemento 2

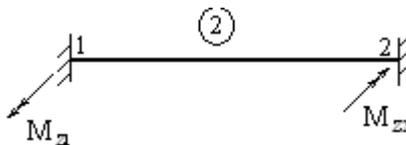


Fig.6.2c. Gradiente de temperatura en la viga

$$M_{z1} = -M_{z2} = \frac{(200 \times 10^9) (50 \times 10^6) (1.2 \times 10^{-5}) (-10)}{0.200} = -6.0 \times 10^3 \text{ KN-mm}$$

La solución de este problema se obtuvo mediante una versión particular del programa MEF.01, escrita de tal modo que el lector pueda seguir los cálculos como si estuviera resolviendo el problema en forma manual.

PROBLEMA: VIGA NO UNIFORME SUJETA CONTINUA DE EJE RECTO SUJETA A UN CAMBIO DE TEMPERATURA

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS..... (NN) = 3

NÚMERO DE ELEMENTOS..... (NE)..... = 2

NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO (NGLN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO (NNPE)..... = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO (NCOPN)..... = 1
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS..... (NNDP) = 3
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS (NNC)..... = 0
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS (NEC) = 2
 ELEMENTO...(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) = 3
 NÚMERO DE MATERIALES (NMAT) = 2

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X
1	0.00000E+00
2	0.80000E+01
3	0.13000E+02

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES			TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1	
2	2	3	2	

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.20000E+01
2	0.00000E+00	0.20000E+01
3	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.20000E+12
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIZ) = 0.20000E-03

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 2

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E) = 0.20000E+12
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCIÓN.....(CIZ)..... = 0.50000E-04

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

=====

ELEM.	CAR.1	CAR.2	CAR.3	CAR.4
1	0.00000E+00	-0.12000E+05	0.00000E+00	0.12000E+05
2	0.00000E+00	-0.60000E+04	0.00000E+00	0.60000E+04

VECTOR DE CARGAS NODALES EQUIVALENTE
CARGAS NODALES + CARGAS EN LOS ELEMENTOS

=====
0.000E+00
0.120E+05
0.000E+00
-0.600E+04
0.000E+00
-0.600E+04

MATRIZ LOCAL DEL ELEMENTO NÚMERO: 1

=====
0.938E+06 0.375E+07 -0.938E+06 0.375E+07
0.375E+07 0.200E+08 -0.375E+07 0.100E+08
-0.938E+06 -0.375E+07 0.938E+06 -0.375E+07
0.375E+07 0.100E+08 -0.375E+07 0.200E+08

MATRIZ LOCAL RELATIVA AL SISTEMA GLOBAL
DE REFERENCIA DEL ELEMENTO NÚMERO: 1

=====
0.938E+06 0.375E+07 -0.938E+06 0.375E+07
0.375E+07 0.200E+08 -0.375E+07 0.100E+08
-0.938E+06 -0.375E+07 0.938E+06 -0.375E+07
0.375E+07 0.100E+08 -0.375E+07 0.200E+08

MATRIZ LOCAL DEL ELEMENTO NÚMERO: 2

=====
0.960E+06 0.240E+07 -0.960E+06 0.240E+07
0.240E+07 0.800E+07 -0.240E+07 0.400E+07
-0.960E+06 -0.240E+07 0.960E+06 -0.240E+07
0.240E+07 0.400E+07 -0.240E+07 0.800E+07

MATRIZ LOCAL RELATIVA AL SISTEMA GLOBAL
DE REFERENCIA DEL ELEMENTO NÚMERO: 2

=====
0.960E+06 0.240E+07 -0.960E+06 0.240E+07
0.240E+07 0.800E+07 -0.240E+07 0.400E+07
-0.960E+06 -0.240E+07 0.960E+06 -0.240E+07
0.240E+07 0.400E+07 -0.240E+07 0.800E+07

MATRIZ GLOBAL ANTES DE INTRODUCIR LAS
CONDICIONES DE CONTORNO

=====
0.938E+06 0.375E+07 -0.938E+06 0.375E+07 0.000E+00 0.000E+00
0.375E+07 0.200E+08 -0.375E+07 0.100E+08 0.000E+00 0.000E+00
-0.938E+06 -0.375E+07 0.190E+07 -0.135E+07 -0.960E+06 0.240E+07
0.375E+07 0.100E+08 -0.135E+07 0.280E+08 -0.240E+07 0.400E+07
0.000E+00 0.000E+00 -0.960E+06 -0.240E+07 0.960E+06 -0.240E+07

0.000E+00 0.000E+00 0.240E+07 0.400E+07-0.240E+07 0.800E+07

MATRIZ GLOBAL DESPUES DE INTRODUCIR
LAS CONDICIONES DE CONTORNO

=====

0.100E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.200E+08	0.000E+00	0.100E+08	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	0.100E+01	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.100E+08	0.000E+00	0.280E+08	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.100E+01	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.100E+01

VECTOR DE CARGAS NODALES EQUIVALENTE DESPUES DE
INTRODUCIR LAS CONDICIONES DE CONTORNO

=====

0.00000E+00
0.12000E+05
0.00000E+00
-0.60000E+04
0.00000E+00
0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.86087E-03
2	0.00000E+00	-0.52174E-03
3	0.00000E+00	0.00000E+00

ELEMENTO: VIGA DE EJE RECTO

=====

ELEM	NODO	FY	MZ
1	1	0.1272E+04	-0.1819E-11
	2	-0.1272E+04	0.1017E+05
2	2	-0.1252E+04	-0.1017E+05
	3	0.1252E+04	0.3913E+04

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2
1	0.12717E+04	-0.18190E-11
2	-0.25239E+04	0.00000E+00
3	0.12522E+04	0.39130E+04

6.3.- Errores de fabricación

De igual modo que los efectos térmicos, los errores de fabricación (medida incorrecta de la longitud de un elemento), se tratan usando el concepto de fuerzas de extremo fijo y del vector de cargas nodales equivalentes ya visto anteriormente. Estos errores ocurren con frecuencia en la práctica, y cuando se ajusta el elemento con la dimensión incorrecta a la estructura, se inducen en ésta, fuerzas que debe ser considerada adicionalmente a las cargas exteriores aplicadas. Independientemente del tipo de elemento, el procedimiento a considerar es siempre es el mismo, de modo que la solución de este problema se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3

Considérese la armadura plana mostrada en la Fig.E.3.1a. Supóngase que el elemento 5 de la armadura se ha fabricado $\frac{1}{4}$ pulg. más corto que lo inicialmente dimensionado. El problema consiste en determinar las acciones que se generan en los extremos de dicho elemento, y que generarán cargas a la estructura, cuando se realiza su acople a la estructura. Una vez que se han obtenidas dichas cargas, el análisis de la armadura sigue el procedimiento ya ampliamente estudiado. Se ha asumido que todos los elementos de la armadura tienen una área de la sección transversal de $A = 2 \text{ pu lg}^2$ y un módulo de elasticidad de $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$.

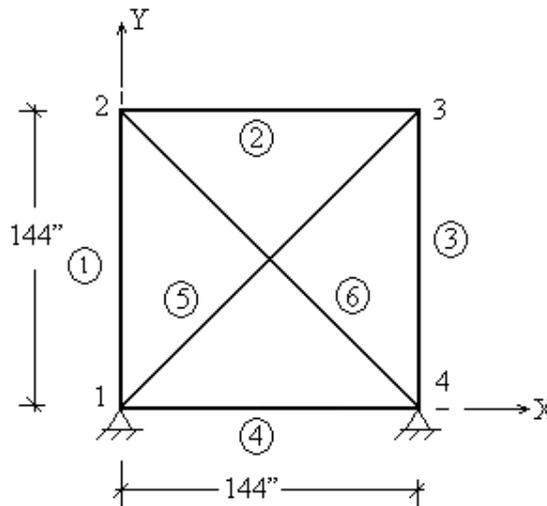


Fig.E6.3.a. Armadura con un elemento (AB) con errores de fabricación

Con estos datos, las fuerzas requeridas en los extremos fijos del elemento 5, y que se muestran en la Fig.6.3.b, son:

$$u = \frac{PL}{AE} \Rightarrow P = \frac{AE}{L} u = \frac{(2)(29 \times 10^6)}{203.646} \left(\frac{1}{4} \right) = 71202 \text{ lbs}$$

Es decir:

$$P = -f_1 = f_2 = 71202 \text{ lbs}$$

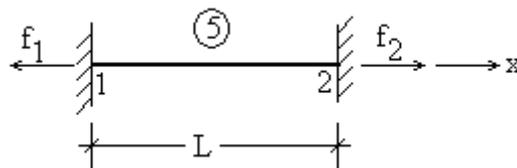


Fig.6.3.b. Fuerzas de extremo de miembro fijo para ele elemento 5

Las fuerzas nodales equivalentes se muestran en la Fig.6.3.c. Nótese que P (es decir; f_1 y f_2), actúa en la dirección del eje longitudinal del elemento 5. Puesto que las fuerzas nodales se especifican en términos del sistema global de referencia, se hace necesario transformar las fuerzas de extremo fijo (siempre referidas al sistema local de coordenadas), al sistema global de referencia; es decir:

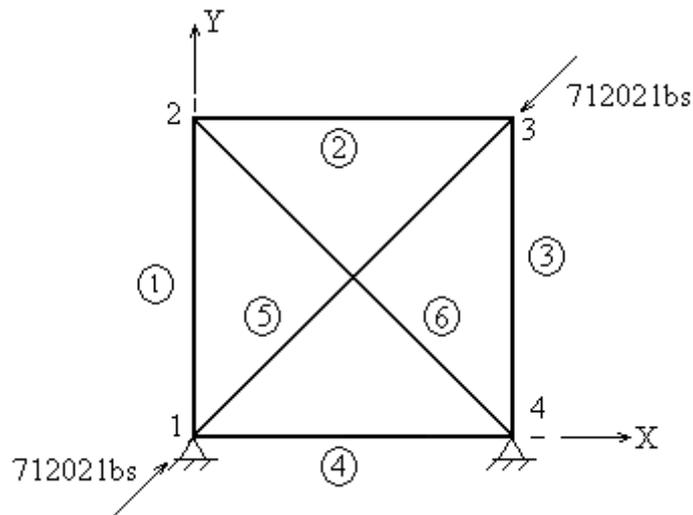


Fig.6.3.c. Cargas nodales equivalentes sobre el elemento AB

$$\{u\} = [R]\{U\}$$

y

$$\{f\} = [R]\{F\}$$

donde $\{u\}$ y $\{f\}$ están asociados al sistema local de referencia y $\{U\}$ y $\{F\}$, lo están respecto al sistema global de referencia. Puesto que:

$$\{f\} = [R]\{F\} \Rightarrow \{F\} = [R]^{-1} \{f\}$$

Sin embargo, como ya se estableció:

$$[R]^{-1} = [R]^T$$

y por lo tanto:

$$\{F\} = [R]^T \{P\} \tag{6.8}$$

La ec. (6.8) establece la transformación del vector de fuerzas nodales equivalentes locales $\{f\}$ al vector de fuerzas nodales equivalentes globales $\{F\}$. Para el elemento 5, la matriz de rotación $[R]^T$ viene dada por:

$$[R]^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

y ahora, de acuerdo a la ec. (6.8)

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 71202 \\ 0.0 \\ -71202 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 50347 \\ 50347 \\ -50347 \\ -50347 \end{Bmatrix} \text{ lbs}$$

Estas fuerzas se muestran en la Fig.6.3.d.

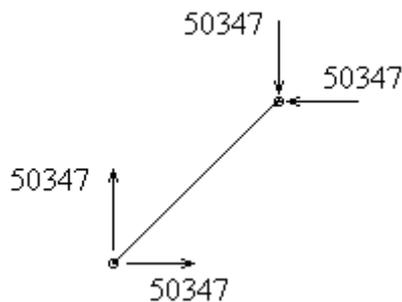


Fig.6.3.d. Fuerzas sobre elemento 5 producidas por error de fabricación

Como ya se dijo, una vez determinadas las acciones producidas por el error de fabricación, el análisis de la armadura sigue el derrotero usual. La solución del problema mediante el programa MEF01.for se presenta a continuación.

PROBLEMA: ARMADURA PLANA CON EL ELEMENTO 5 MAS CORTO 1/4 DE PULGADA

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS..... (NN) = 4
 NÚMERO DE ELEMENTOS..... (NE) = 6
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO (NGLN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO (NNPE)..... = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO (NCOPN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS..... (NNDP) = 2
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS (NNC)..... = 2
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS (NEC)..... = 0
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) = 2
 NÚMERO DE MATERIALES (NMAT) = 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.14400E+03
3	0.14400E+03	0.14400E+03
4	0.14400E+03	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES			TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1	
2	2	3	1	
3	4	3	1	
4	1	4	1	
5	1	3	1	
6	2	4	1	

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.20000E+01

CARGAS EN LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
------	-------	-------

```

1   0.50347E+05  0.50347E+05
3  -0.50347E+05 -0.50347E+05

```

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```

=====
NODO  DIR.1      DIR.2
1     0.00000E+00 0.00000E+00
2    -0.15636E+00 -0.40841E-01
3    -0.19720E+00 -0.40841E-01
4     0.00000E+00 0.00000E+00

```

ELEMENTO: ARMADURA PLANA

```

=====
ELEM  NODO      FX          FY
1     1     0.1645E+05  0.0000E+00
      2    -0.1645E+05  0.0000E+00
2     2     0.1645E+05  0.0000E+00
      3    -0.1645E+05  0.0000E+00
3     4     0.1645E+05  0.0000E+00
      3    -0.1645E+05  0.0000E+00
4     1     0.0000E+00  0.0000E+00
      4     0.0000E+00  0.0000E+00
5     1     0.4794E+05  0.0000E+00
      3    -0.4794E+05  0.0000E+00
6     2    -0.2326E+05  0.0000E+00
      4     0.2326E+05  0.0000E+00

```

REACCIONES EN LOS APOYOS

```

=====
NODO  REAC 1      REAC 2
1     0.33897E+05  0.50347E+05
4     0.16450E+05 -0.36380E-11

```

6.4.- Apoyos elásticos

Con la finalidad de prevenir reacciones excesivas, o para distribuir los esfuerzos internos de una forma más eficiente en los elementos, algunas estructuras están provistas de tipos especiales de apoyos.

Por ejemplo la viga doblemente empotrada mostrada en la Fig.6.3a, está sometida a momentos en los extremos que son el doble del momento máximo que se genera en la sección transversal situada en el centro de la misma. Los valores de los momentos en los extremos de la viga pueden ser atenuados permitiendo a éstos una cierta rotación. La magnitud de la rotación permitida depende de qué tanta reducción se desea. Si los extremos se dejarán rotar libremente, tal como lo muestra la Fig.6.3.b, la reducción, por supuesto sería del 100%. Sin embargo, una unión como la de un resorte con una constante k

(el momento requerido para rotar un radián), puede mantener algún valor del momento en los extremos de la viga., tal como se muestra en la Fig.6.3.c.

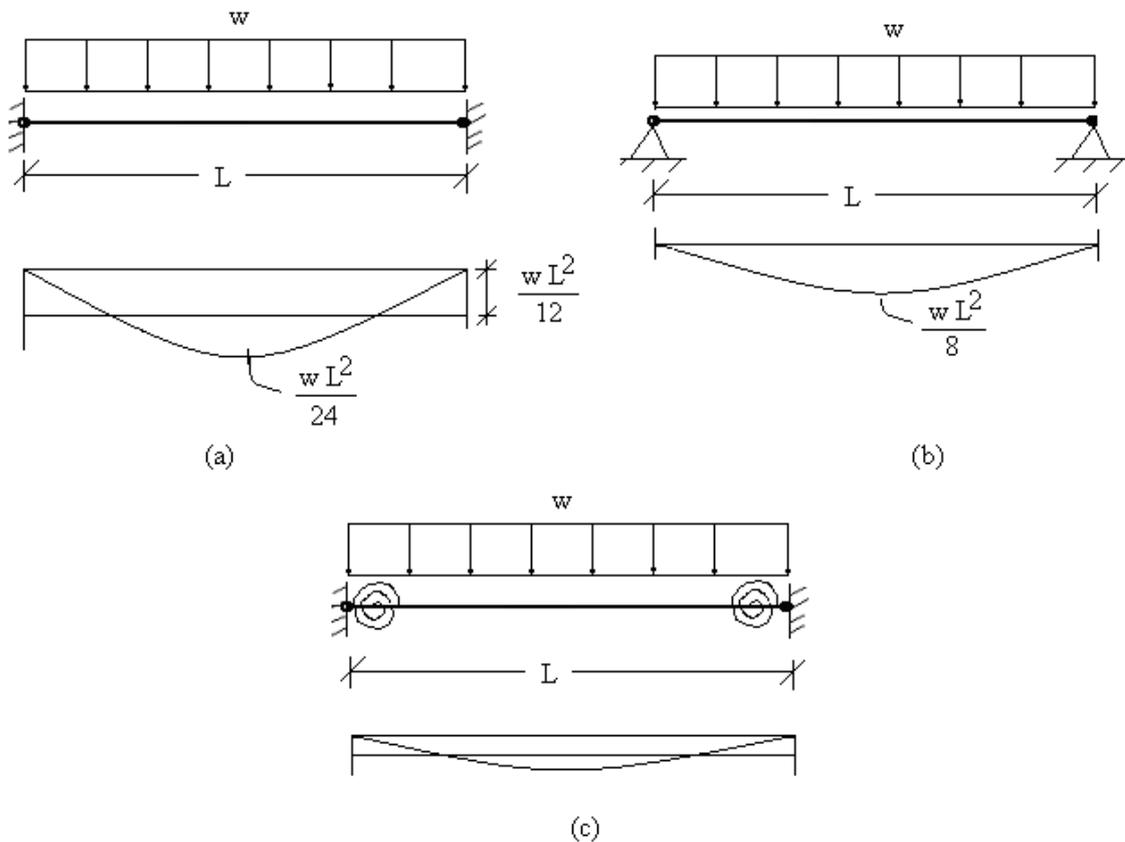


Fig.6.3. Momentos en los extremos de una viga con diferentes condiciones de apoyo

Considérese además, la viga mostrada en la Fig.6.4a. Si los apoyos no ceden, la reacción en el apoyo central será mucho más grande que la reacción en los apoyos laterales. Supóngase ahora que el apoyo central se reemplaza por un resorte lineal, tal como se muestra en la Fig.6.4.b. Dependiendo del valor de la constante del resorte (fuerza requerida por unidad de desplazamiento), el movimiento hacia abajo del punto central puede variar considerablemente. Éste a su vez produce diferentes reacciones y esfuerzos en la viga.

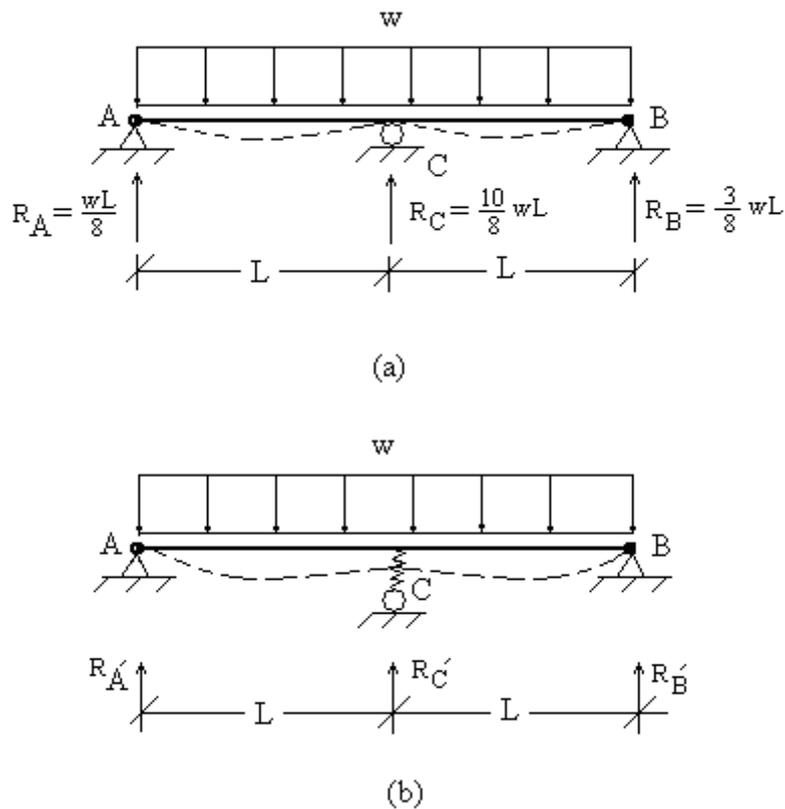


Fig.6.4. Viga con un apoyo elástico

Supóngase que el nodo i -ésimo de la estructura está apoyado sobre un resorte cuyas componentes en el sistema global de referencia son k_1, k_2 y k_3 , tal como se muestra en la Fig.6.5a. Supóngase, además, que estas constantes de resorte no están acopladas. En otras palabras, que k_1 representa la fuerza necesaria para mover el apoyo en la dirección X sin la presencia de k_2 y k_3 . Análogamente, la presencia de k_1 y k_2 no tienen efecto sobre la rigidez rotacional k_3 del resorte. La matriz de rigidez del apoyo elástico de la Fig.6.5, puede entonces escribirse como:

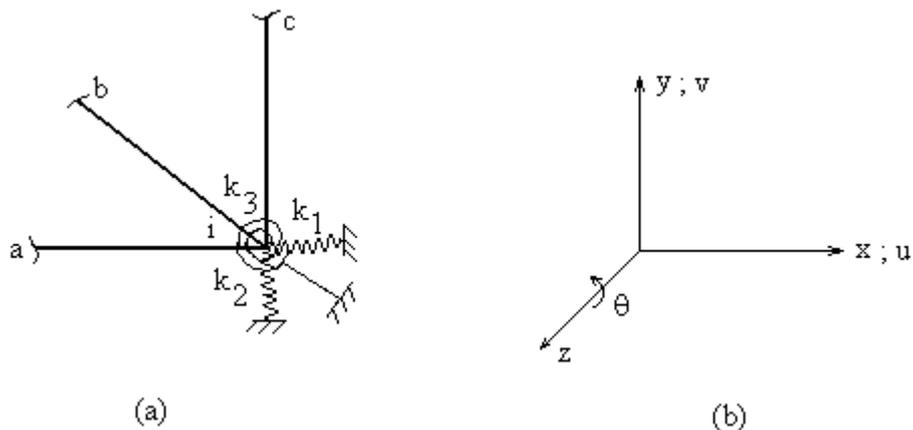


Fig.6.5. Nodo i soportado por apoyos elásticos

$$\begin{Bmatrix} f_X \\ f_Y \\ f_Z \end{Bmatrix}^{(\text{nodo } i)} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}^{(\text{nodo } i)} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{Bmatrix}^{(\text{nodo } i)} \quad (6.9)$$

o, en forma compacta:

$$f_i = K_{ii}^{(r)} \Delta_i \quad (6.10)$$

donde $K_{ii}^{(r)}$ representa la “matriz de rigidez” del apoyo elástico en el nodo i. Si la estructura no estuviera sostenida por estos resortes, el nodo i podría considerarse como un nodo libre, y su rigidez sería la suma de las rigideces de los elementos que concurren en dicho nodo; es decir:

$$K_{ii} = K_{ii}^{(a)} + K_{ii}^{(b)} + K_{ii}^{(c)} \quad (6.11)$$

Sin embargo, cuando el nodo i está sostenido por los resortes, su rigidez aumentará en la magnitud de las rigideces de los resortes; es decir:

$$K_{ii} = K_{ii}^{(a)} + K_{ii}^{(b)} + K_{ii}^{(c)} + K_{ii}^{(r)} \quad (6.12)$$

Las condiciones de contorno en el nodo i no serán alteradas por la presencia del resorte. Por ejemplo, el nodo i, en la Fig.6.5.b podrá considerarse todavía como un nodo libre a pesar de estar sometido a los resortes. Los desplazamientos desconocidos en este nodo estarán entre los resultados del análisis, y su presencia en la ec. (6.9) dará las fuerzas desarrolladas en cada resorte. Los empotramientos absolutos en los apoyos son equivalentes a resortes que tienen una constante $k = \infty$ donde, por consiguiente, no se esperan desplazamientos en la dirección de los apoyos. El siguiente problema ilustrará la solución de un problema de este tipo.

Ejemplo 4

La viga mostrada en la Fig.E4.1 es uniforme con $A = 8 \text{ pu lg}^2$, $I_z = 100 \text{ pu lg}^2$ y $E = 29 \times 10^6 \text{ psi}$, y la constante del resorte que está situado en el nodo 2 es de $k = 20 \times 10^3 \text{ lbs/ pu lg}$. Se desea determinar los desplazamientos de los nodos de la viga así como también las acciones de extremo de miembro y las reacciones.

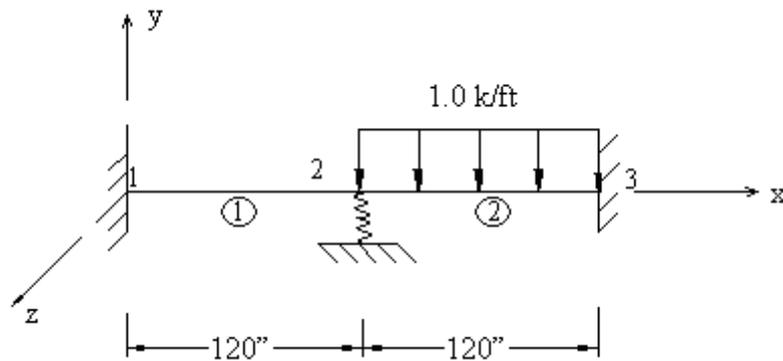


Fig.E4.1. Viga con un apoyo elástico

El vector de cargas nodales equivalentes para el elemento 2 es:

$$\{f\}^T = \{-5.0 \quad -100.0 \quad -5.0 \quad 100.0\}^T \text{ klb}$$

Para el elemento 1:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ f_3^{(1)} \\ f_4^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.201E+05 & 0.121E+07 & -0.201E+05 & 0.121E+07 \\ & 0.967E+08 & -0.121E+07 & 0.483E+08 \\ & & 0.201E+05 & -0.121E+07 \\ \text{Simétrica} & & & 0.967E+08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(1)} \\ u_2^{(1)} \\ u_3^{(1)} \\ u_4^{(1)} \end{Bmatrix}$$

Para el elemento2:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ f_3^{(2)} \\ f_4^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.201E+05 & 0.121E+07 & -0.201E+05 & 0.121E+07 \\ & 0.967E+08 & -0.121E+07 & 0.483E+08 \\ & & 0.201E+05 & -0.121E+07 \\ \text{Simétrica} & & & 0.967E+08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(2)} \\ u_2^{(2)} \\ u_3^{(2)} \\ u_4^{(2)} \end{Bmatrix}$$

La matriz global de rigidez antes de introducir las condiciones de contorno es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.201E+05 & 0.121E+07 & -0.201E+05 & 0.121E+07 & 0.0E+00 & 0.0E+00 \\ & 0.967E+08 & -0.121E+07 & 0.483E+08 & 0.000E+00 & 0.000E+00 \\ & & 0.403E+05 & 0.000E+00 & -0.201E+05 & 0.121E+07 \\ & & & 0.193E+09 & -0.121E+07 & 0.483E+08 \\ \text{Simétrica} & & & & 0.201E+05 & -0.121E+07 \\ & & & & & 0.967E+08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Después de introducir las condiciones de contorno, esta matriz es:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & 0.603E+05 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & 0.193E+09 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & & 1.0 & 0.0 \\ & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix}$$

Nótese que el término (3,3), correspondiente al coeficiente global de rigidez del nodo 3, en la dirección vertical (Y), es la suma de los coeficientes locales de rigidez (3,3) de las matrices locales de rigidez de los dos elementos, más el valor de la constante del resorte; es decir:

$$0.403E+05 + 0.403E+05 + 20.0E+03 = 0.603E+05 .$$

El vector solución para los desplazamientos viene dado por:

$$\{U\}^T = \{0.0E+00 \quad 0.0E+00 \quad -0.82949E-01 \quad -0.51724E-03 \quad 0.0E+00 \quad 0.0E+00\}^T$$

La solución completa de este problema se obtuvo mediante el programa MEF01.for y se presenta a continuación:

PROBLEMA: VIGA UNIFORME CON APOYO ELASTICO: EJEMPLO 4 DE LAS NOTAS DE CLASE.

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

```
NÚMERO DE NODOS..... (NN) ..... = 3
NÚMERO DE ELEMENTOS..... (NE)..... = 2
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO .... (NGLN)..... = 2
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO ..... (NNPE)..... = 2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO ..... (NCOPN)..... = 1
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS..... (NNDP) ..... = 3
NÚMERO DE NODOS CARGADOS ..... (NNC)..... = 0
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS ..... (NEC)..... = 1
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7).... = 3
NÚMERO DE MATERIALES ..... (NMAT) ..... = 1
```

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

```
NODO      COOR. X
1         0.00000E+00
2         0.12000E+03
3         0.24000E+03
```

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEMENTO  NODOS CONCURRENTES  TIPO DE MATERIAL
  1      1    2      1
  2      2    3      1
    
```

CONDICIONES DE CONTORNO

```

=====
NODO  DIR.1  DIR.2
  1  0.00000E+00  0.00000E+00
  2  0.20000E+05  0.20000E+01
  3  0.00000E+00  0.00000E+00
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIZ) ..... = 0.10000E+03
    
```

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEM.  CAR.1  CAR.2
        CAR.3  CAR.4
  2  0.50000E+04  0.10000E+06
     0.50000E+04 -0.10000E+06
    
```

VECTOR DE CARGAS NODALES EQUIVALENTE
CARGAS NODALES + CARGAS EN LOS ELEMENTOS

```

=====
  0.000E+00
  0.000E+00
 -0.500E+04
 -0.100E+06
 -0.500E+04
  0.100E+06
    
```

MATRIZ LOCAL DEL ELEMENTO NÚMERO: 1

```

=====
  0.201E+05  0.121E+07 -0.201E+05  0.121E+07
  0.121E+07  0.967E+08 -0.121E+07  0.483E+08
 -0.201E+05 -0.121E+07  0.201E+05 -0.121E+07
  0.121E+07  0.483E+08 -0.121E+07  0.967E+08
    
```

MATRIZ LOCAL RELATIVA AL SISTEMA GLOBAL
DE REFERENCIA DEL ELEMENTO NÚMERO: 1

```

=====
    
```

```
0.201E+05 0.121E+07 -0.201E+05 0.121E+07
0.121E+07 0.967E+08 -0.121E+07 0.483E+08
-0.201E+05 -0.121E+07 0.201E+05 -0.121E+07
0.121E+07 0.483E+08 -0.121E+07 0.967E+08
```

MATRIZ LOCAL DEL ELEMENTO NÚMERO: 2

```
=====
0.201E+05 0.121E+07 -0.201E+05 0.121E+07
0.121E+07 0.967E+08 -0.121E+07 0.483E+08
-0.201E+05 -0.121E+07 0.201E+05 -0.121E+07
0.121E+07 0.483E+08 -0.121E+07 0.967E+08
```

MATRIZ LOCAL RELATIVA AL SISTEMA GLOBAL
DE REFERENCIA DEL ELEMENTO NÚMERO: 2

```
=====
0.201E+05 0.121E+07 -0.201E+05 0.121E+07
0.121E+07 0.967E+08 -0.121E+07 0.483E+08
-0.201E+05 -0.121E+07 0.201E+05 -0.121E+07
0.121E+07 0.483E+08 -0.121E+07 0.967E+08
```

MATRIZ GLOBAL ANTES DE INTRODUCIR LAS
CONDICIONES DE CONTORNO

```
=====
0.201E+05 0.121E+07 -0.201E+05 0.121E+07 0.000E+00 0.000E+00
0.121E+07 0.967E+08 -0.121E+07 0.483E+08 0.000E+00 0.000E+00
0.201E+05 -0.121E+07 0.403E+05 0.000E+00 -0.201E+05 0.121E+07
0.121E+07 0.483E+08 0.000E+00 0.193E+09 -0.121E+07 0.483E+08
0.000E+00 0.000E+00 -0.201E+05 -0.121E+07 0.201E+05 -0.121E+07
0.000E+00 0.000E+00 0.121E+07 0.483E+08 -0.121E+07 0.967E+08
```

MATRIZ GLOBAL DESPUES DE INTRODUCIR
LAS CONDICIONES DE CONTORNO

```
=====
0.100E+01 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.100E+01 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.603E+05 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.193E+09 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.100E+01 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.100E+01
```

VECTOR DE CARGAS NODALES EQUIVALENTE DESPUES DE
INTRODUCIR LAS CONDICIONES DE CONTORNO

```
=====
0.00000E+00
0.00000E+00
-0.50000E+04
-0.10000E+06
0.00000E+00
```

0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```
=====
NODO DIR.1 DIR.2
1 0.00000E+00 0.00000E+00
2 -0.82949E-01 -0.51724E-03
3 0.00000E+00 0.00000E+00
```

ELEMENTO: VIGA DE EJE RECTO

```
=====
ELEM NODO FY MZ
1 1 0.1046E+04 0.7523E+05
2 2 -0.1046E+04 0.5023E+05
2 2 0.2704E+04 -0.5023E+05
3 3 0.7296E+04 -0.2252E+06
```

REACCIONES EN LOS APOYOS

```
=====
NODO REAC 1 REAC 2
1 0.10455E+04 0.75230E+05
2 0.16590E+04 -0.72760E-11
3 0.72955E+04 -0.22523E+06
```

Las acciones de extremo de miembro de la viga se muestran en la Fig.E6.4.2.a y en la Fig.E6.4.c. En la Fig.E6.4.2.b, se muestra el diagrama de cuerpo libre del resorte. Nótese que la reacción vertical (en la dirección Y) (es decir, la fuerza ejercida sobre el resorte), en el nodo 2 es de 1659 lbs. La contracción del resorte debida a esta fuerza será, entonces, igual a $\delta = F/k = 1659/20000 = 0.08295$ pulg, lo que está de acuerdo con el resultado del análisis que, como se puede apreciar, es de -0.082949 pulg.

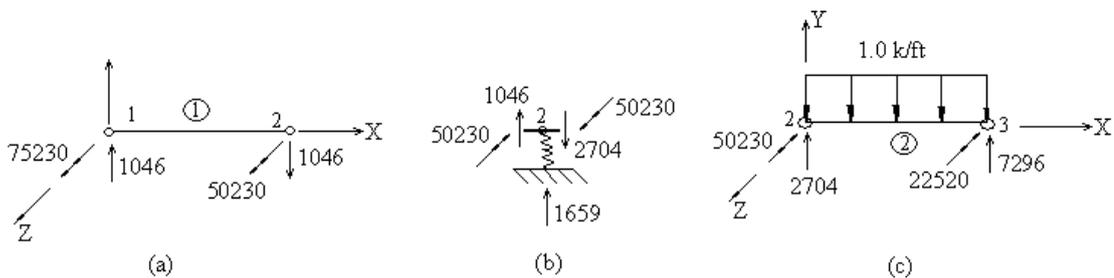


Fig.E6.4.2. Acciones de extremo de miembro y diagrama de cuerpo libre del resorte.

Otro de los problemas que frecuentemente encuentra el ingeniero estructural, consiste en investigar la respuesta de una estructura que descansa sobre una masa de suelo que se deforma con las cargas que ésta le transmite. Si se conocen las propiedades del suelo, es posible representar el material de

sustentación mediante un conjunto de resortes. El siguiente ejemplo muestra la solución de este tipo de problemas.

Ejemplo 5

La viga simplemente apoyada, sujeta a una carga uniformemente distribuida q_0 , mostrada en la Fig.E6.5, está soportada sobre una fundación elástica, la cual está indicada, gráficamente, por una serie de elásticos. La fuerza generada por la fundación elástica por unidad de longitud y por unidad de deflexión en un punto, se denomina "módulo de la fundación" y se denota por K_f . La distribución de fuerzas sobre la viga ejercida por la fundación viene, entonces, dada por $K_f \cdot y$, donde y es la deflexión de la viga en una sección transversal de la viga situada a una distancia x , del origen del sistema de coordenadas.

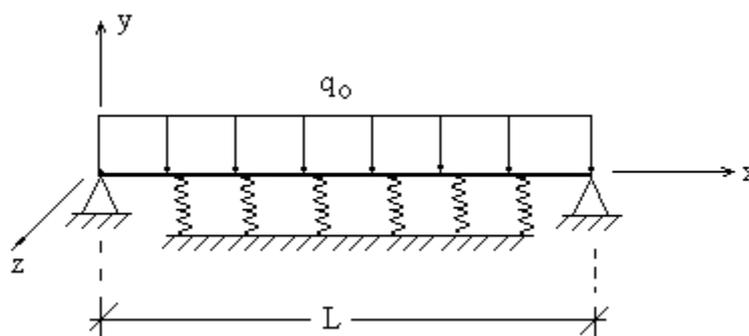


Fig.E5.1. Viga sobre fundación elástica

Las soluciones analíticas^[39] de las ecuaciones que gobiernan este problema que permiten obtener la distribución de las deflexiones y el momento flector son, respectivamente:

$$y(x) = \frac{q_0}{k} \left[1 - \frac{\cosh \lambda x \cos \lambda(x-L) + \cosh \lambda(x-L) \cos \lambda x}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L} \right] \quad (E6.5.1)$$

y para el momento flector, la solución

$$M_z(x) = -EI \frac{d^2 y}{dx^2} \left[-\frac{q_0}{2\lambda^2} \frac{\sinh \lambda x \operatorname{sen} \lambda(x-L) + \sinh \lambda(x-L) \operatorname{sen} \lambda x}{\cosh \lambda L + \cos \lambda L} \right] \quad (E6.5.2)$$

donde $\lambda = \sqrt[4]{\frac{K_f}{4EI_z}}$.

Mediante el empleo de métodos numéricos (método de Ritz), se logra obtener las soluciones aproximadas^[39] de este problema, las cuales vienen dadas por:

$$y(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q_0 L^4 / (n^5 \pi^5 EI_z)}{1 + \frac{kL^4}{(n^4 \pi^4 EI_z)}} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (\text{E6.5.3})$$

y

$$M_z(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4q_0 L^2 / (n\pi)^3}{1 + \frac{kL^4}{(n^4 \pi^4 EI_z)}} \operatorname{sen}\left(\frac{n \pi x}{L}\right) \quad (\text{E6.5.4})$$

Sea el valor de $K_f L^4 / EI_z = 4$. La Tabla 5.1 muestra los valores de la deflexión y el momento flector en el centro de la viga. Como se puede apreciar, esta solución aproximada converge muy rápidamente.

	Exacto	n=1	n=1,3	n=1,3,5	n=1,3,5,7
$\frac{EIy(L/2)}{q_0 L^4}$	0.012505	0.12556	0.012502	0.012506	0.012506
$\frac{M_z y(L/2)}{q_0 L^2}$	0.119914	0.123918	0.119148	0.120174	0.119798

Sea $E=200 \text{ Gpa}$, $I_z=100 \times 10^{-6} \text{ m}^4$, $L=10 \text{ m}$, $q_0=60 \text{ N/m}$. Con estos valores, la solución exacta para la deflexión en el punto medio de la viga es:

$$\frac{EIy(L/2)}{q_0 L^4} = 0.012505 \quad \Rightarrow \quad y(L/2) = -0.37515 \times 10^{-3} \text{ m}$$

y

$$\frac{M_z y(L/2)}{q_0 L^2} = 0.119914 \quad \Rightarrow \quad M_z(L/2) = 719.484 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Puesto que se ha asumido que $kL^4 / EI_z = 4$, el módulo de la fundación es:

$$K_f = \frac{4EI_z}{L^4} = \frac{(4)(200 \times 10^9)(100 \times 10^{-6})}{(10)^4} = 8000 \text{ N/m.m}$$

y la fuerza por unidad de longitud que la fundación ejerce sobre la viga es:

$$K = K_f \cdot L = 8000(10) = 80000 \text{ N/m}$$

En la solución de este problema mediante el programa MEF01.for se consideró, en primer lugar, la discretización de la fundación elástica (4 elementos), mostrada en la Fig.E.5.2.

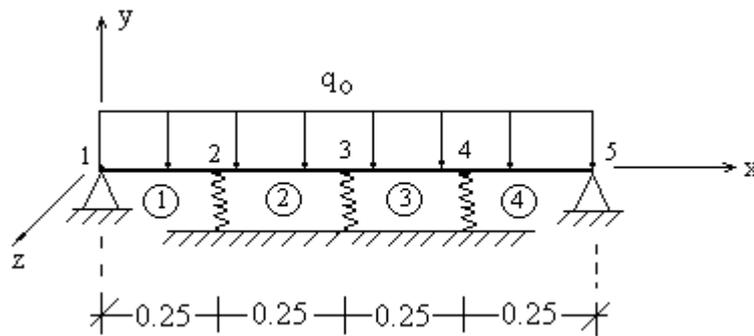


Fig.E5.1. Discretización de la viga sobre fundación elástica

Con esta discretización, la constante de los resortes vendrá dada por:
 $k = \frac{K}{3} = 26666.67 \text{ N/m}$. La solución obtenida es:

PROBLEMA: VIGA SIMPLEMENTE APOYADA SOBRE FUNDACION ELASTICA
 $K/L=8000.0 \text{ N/m.m}$ (3 ELEM)

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS.....(NN)..... = 5
 NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 4
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO ..(NGLN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE)..... = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN)..... = 1
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 5
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS(NNC)..... = 0
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS(NEC)..... = 4
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7)..... = 3
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT)..... = 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X
1	0.00000E+00
2	0.25000E+01
3	0.50000E+01
4	0.75000E+01
5	0.10000E+02

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES	TIPO DE MATERIAL
1	1 2	1

2	2	3	1
3	3	4	1
4	4	5	1

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.20000E+01
2	0.26667E+05	0.20000E+01
3	0.26667E+05	0.20000E+01
4	0.26667E+05	0.20000E+01
5	0.00000E+00	0.20000E+01

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD..... (E)	= 0.20000E+12
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION..... (CIZ).....	= 0.10000E-03

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

=====

ELEM.	CAR.1	CAR.2	CAR.3	CAR.4
1	0.75000E+02	0.31250E+02		
	0.75000E+02	-0.31250E+02		
2	0.75000E+02	0.31250E+02		
	0.75000E+02	-0.31250E+02		
3	0.75000E+02	0.31250E+02		
	0.75000E+02	-0.31250E+02		
4	0.75000E+02	0.31250E+02		
	0.75000E+02	-0.31250E+02		

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	-0.11862E-03
2	-0.26392E-03	-0.81424E-04
3	-0.37026E-03	0.45740E-19
4	-0.26392E-03	0.81424E-04
5	0.00000E+00	0.11862E-03

ELEMENTO: VIGA DE EJE RECTO

=====

ELEM	NODO	FY	MZ
1	1	0.2880E+03	-0.6821E-12
	2	-0.1380E+03	0.5326E+03

2	2	0.1451E+03	-0.5326E+03
	3	0.4937E+01	0.7077E+03
3	3	0.4937E+01	-0.7077E+03
	4	0.1451E+03	0.5326E+03
4	4	-0.1380E+03	-0.5326E+03
	5	0.2880E+03	0.4547E-12

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2
1	0.28803E+03	-0.68212E-12
2	0.70378E+01	0.22737E-12
3	0.98736E+01	0.14779E-11
4	0.70378E+01	0.22737E-12
5	0.28803E+03	0.45475E-12

En la Tabla E.5.1 se muestran los valores obtenidos para el desplazamiento y el momento flector en el punto medio de la viga para diferentes discretizaciones de la fundación elástica. Nótese que ya para la discretización con 16 elementos los errores relativos a la solución analítica para el desplazamiento son de 0.026%, y para el momento flector es de 0.029%. Se sugiere que el lector verifique estos resultados.

**Tabla E5.1 Soluciones obtenidas mediante
MEF01.for.**

Nº Elem.	$y(L/2)$	$M_z(L/2)$
4	-0.37026E-03	0.7077E+03
8	-0.37305E-03	0.7149E+03
16	-0.37417E-03	0.7174E+03
40	-0.37478E-03	0.7187E+03
80	-0.37497E-03	0.7191E+03

6.5.- Apoyos inclinados

Hasta el presente, sólo se han tratado los casos en los cuales los apoyos de una estructura restringen o especifican los desplazamientos en las direcciones de los ejes globales de la estructura. Sin embargo, existen situaciones similares a la mostrada en la siguiente Fig.6.6.

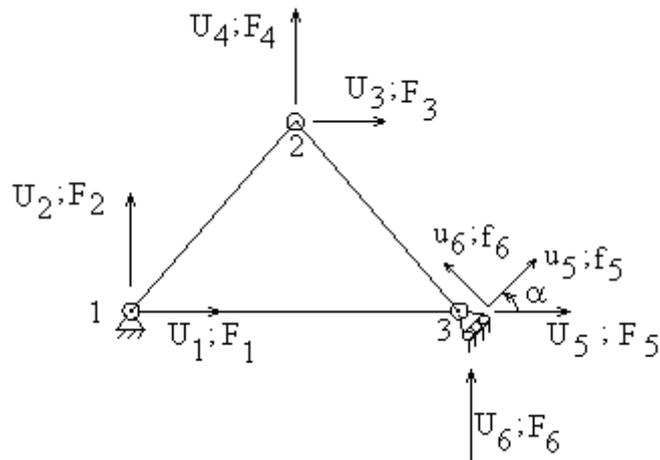


Fig.6.6. Estructura con apoyos inclinados

La reacción en el nodo 3 debe ser perpendicular al apoyo y el desplazamiento en esa dirección debe ser cero. Luego, se deben modificar las relaciones fuerza – deformación para obtener fuerzas y desplazamientos paralelos y perpendiculares al apoyo; es decir, en las direcciones del sistema local de referencia.

Considérese la siguiente Fig.6.7, la cual muestra las direcciones de los desplazamientos locales y globales del nodo 3 de la estructura anterior.

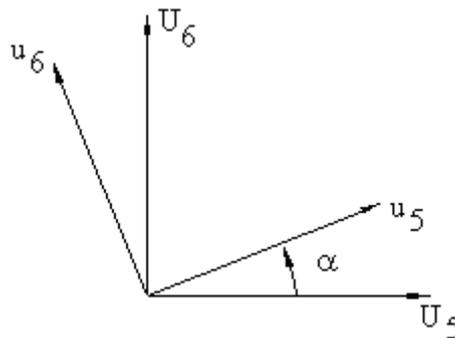


Fig.6.7. Ejes globales y locales asociados al nodo 3

Pero, como ya se sabe:

$$\begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad (6.13)$$

o, en forma compacta:

$$\{u\}_{\text{nodo3}} = [R_3] \{U\}_{\text{nodo3}} \quad (6.14)$$

de donde:

$$\begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = [R_3]^T \begin{Bmatrix} u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (6.15)$$

ya que, como se sabe, en general, $[R] = [R]^T$. La matriz de rotación para toda la armadura mostrada en la Fig.6.6, se puede escribir de la siguiente manera:

$$[R] = \begin{bmatrix} [I] & & \\ & [I] & \\ & & [R_3] \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Las matrices identidad $[I]$ y la matriz $[R_3]$ son de segundos orden (2×2); en general el orden de estas matrices es igual al número de grados de libertad asociados a cada nodo.

Como ya se estudió, la transformación de las fuerzas nodales desde el sistema local, viene dada, en general, por:

$$\{f\} = [R]\{F\} \quad (6.17)$$

y con relación al sistema global de referencia, se tiene:

$$\{F\} = [K]\{U\} \quad (6.18)$$

Pre multiplicando la ec.(6.18) por $[R]$, se obtiene:

$$[R]\{F\} = [R][K]\{U\} \quad (6.19)$$

Para la armadura completa mostrada, el miembro izquierdo de la ecuación anterior es:

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [R_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

donde se realizó, en forma análoga a la ec.(6.14), la transformación de las fuerzas nodales en el nodo 3; es decir:

$$\{f\}_{\text{nodo 3}} = [R_3]\{F\}_{\text{nodo 3}} \quad (6.21)$$

En la ec.(6.20), cada sub matriz de la ec.(6.20) también es 2×2 y $[0]$ representa la matriz nula. Nótese que las únicas componentes del vector de fuerzas que fueron transformadas son las que están asociadas al nodo 3. Siguiendo un razonamiento análogo, la relación entre el vector de

desplazamientos global de los nodos 1 y 2, el vector de desplazamientos local del nodo 3, viene dado por:

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] \\ [0] & [I] & [0] \\ [0] & [0] & [R_3] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (6.22)$$

De nuevo, nótese que solamente fueron transformadas las componentes del desplazamiento asociadas al nodo 3. Finalmente, sustituyendo la ec.(6.22) en la ec.(6.19), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = [R][K][R]^T \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

Ejemplo 6

Supóngase que se desea determinar los desplazamientos nodales de la armadura mostrada en la Fig.E6.1. Se desea determinar los desplazamientos nodales y las reacciones.

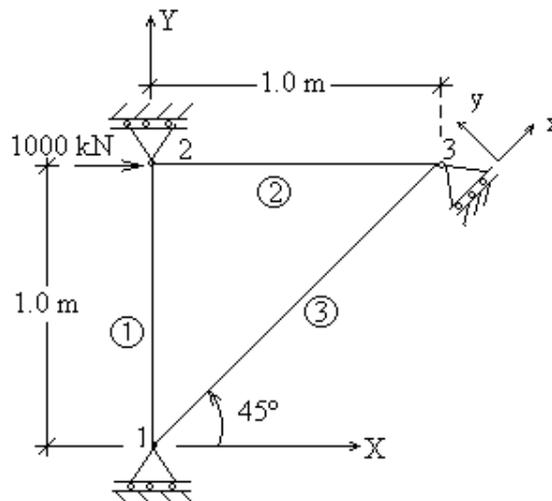


Fig.E6.1. Armadura plana con un apoyo inclinado

Sea $E=210\text{GPa}$; para los elementos 1 y 2 $A=600\times 10^{-4}\text{ m}^2$, para el elemento 3, $A=6\sqrt{2}\times 10^{-4}\text{ m}^2$. Con relación al sistema global de referencia, las matrices locales de rigidez [ec.(5.42)]son:

Elemento 1:

$$^{(1)}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0.0\text{E} + 00 & 0.0\text{E} + 00 & 0.0\text{E} + 00 & 0.0\text{E} + 00 \\ & 0.126\text{E} + 09 & 0.0\text{E} + 00 & -0.126\text{E} + 09 \\ \text{Simétrica} & & 0.0\text{E} + 00 & 0.0\text{E} + 00 \\ & & & 0.126\text{E} + 09 \end{bmatrix}$$

Elemento 2:

$$^{(2)}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0.126\text{E} + 09 & 0.0\text{E} + 00 & -0.126\text{E} + 09 & 0.0\text{E} + 00 \\ & 0.0\text{E} + 00 & 0.0\text{E} + 00 & 0.0\text{E} + 00 \\ \text{Simétrica} & & 0.126\text{E} + 09 & 0.0\text{E} + 00 \\ & & & 0.0\text{E} + 00 \end{bmatrix}$$

Elemento 3:

$$^{(3)}[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0.630\text{E} + 08 & 0.630\text{E} + 08 & -0.630\text{E} + 08 & -0.630\text{E} + 08 \\ & 0.630\text{E} + 08 & -0.630\text{E} + 08 & -0.630\text{E} + 08 \\ \text{Simétrica} & & 0.630\text{E} + 08 & 0.630\text{E} + 08 \\ & & & 0.630\text{E} + 08 \end{bmatrix}$$

Ahora se deberá obtener la matriz de transformación $[\mathbf{R}]$ dada por la ec.(6.16) para así poder transformar los desplazamientos globales del nodo 3 con respecto a los ejes $x'-y'$, mostrados en la Fig.E6.1. En dicha ecuación, los coeficientes de $[\mathbf{R}_3]$ se calculan con el ángulo de inclinación del apoyo 3; es decir, $\alpha=45^\circ$. Luego:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{E6.1})$$

El ensamblaje de las matrices locales de rigidez referidas al sistema global sigue el procedimiento general ($[\bar{K}] = [R][K][R]^T$) ya conocido. Para este caso particular, el sistema global de ecuaciones viene dado por:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 10000 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0.0 \\ & 1.5 & 0 & -1.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0.0 \\ & & 1.0 & 0.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Simétrica} & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.5 & -0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{E6.2})$$

Introduciendo las condiciones de contorno; es decir, $U_1 = U_2 = U_4 = u_6 = 0$ en el sistema de ecuaciones anterior, reobtiene:

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 10000 \\ 0.0 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ & 1.0 & 0 & 0 & 0 & 0.0 \\ & & 1.0 & 0.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.5 & 0.0 \\ & & & & & 1.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ U_3 \\ 0.0 \\ u_5 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E6.3})$$

De este modo, el sistema de ecuaciones queda reducido a:

$$\begin{Bmatrix} 10000 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ u_5 \end{Bmatrix} \quad (\text{E.6.4})$$

La solución de este último sistema de ecuaciones es: $U_3 = 11.91 \text{ mm}$, $u_5 = 5.613 \text{ mm}$. Finalmente, las reacciones se obtienen introduciendo los valores de los desplazamientos nodales calculados en el vector global de desplazamientos de la ec.(E6.2).

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ 10000 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{Bmatrix} = 1260 \times 10^5 \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0.0 \\ & 1.5 & 0 & -1.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0.0 \\ & & 1.0 & 0.0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Simétrica} & & & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ & & & & 1.5 & -0.5 \\ & & & & & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 11.91 \times 10^{-3} \\ 0.0 \\ 5.613 \times 10^{-3} \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (\text{E6.5})$$

El resultado es: $F_1 = -500.0 \text{ kN}$; $F_2 = -500.0 \text{ kN}$; $F_4 = 0.0 \text{ kN}$; $F_6 = 707.5 \text{ kN}$.
 Estas reacciones se muestran en la Fig.E6.2. Se observa que la armadura está en equilibrio.

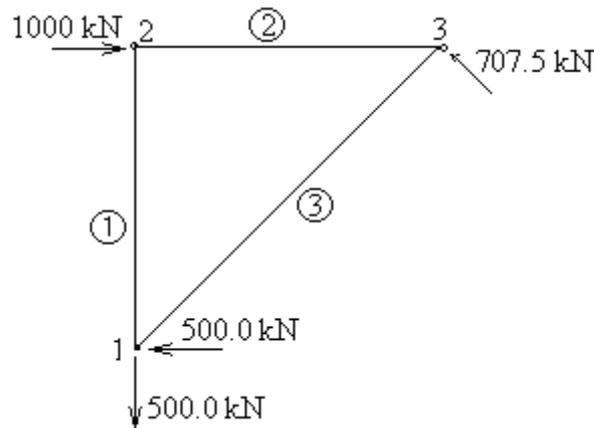


Fig.E6.2 Reacciones de la armadura con apoyo inclinado

Otro método para resolver el problema suscitado por los apoyos inclinados, consiste en reemplazar el apoyo real por un elemento que tenga una gran área de sección transversal, y que tenga su eje longitudinal, en la dirección normal al apoyo inclinado. Puesto que el área de la sección transversal de este nuevo elemento es muy grande, comparada con las áreas de las secciones transversales de los demás elementos, el cambio de su longitud axial será despreciable en el análisis total. Así, de este modo, un elemento de esta naturaleza creará, esencialmente, el mismo efecto que el apoyo inclinado. La ventaja de este método para tratar los apoyos inclinados, radica en el hecho de que basta añadir nuevos elementos (y nodos), a la discretización de la estructura (lo cual no representa mayor esfuerzo), sin realizar modificaciones (como las presentadas en el inicio de esta sección), en un programa computacional dedicado al análisis estructural, como el programa AER.

En la Fig.6.8 se muestra la armadura de la Fig.6.6, con el nuevo elemento con las características descritas.

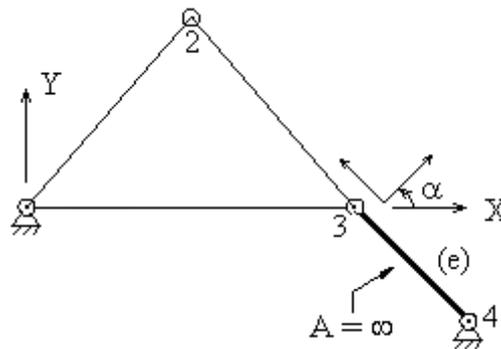
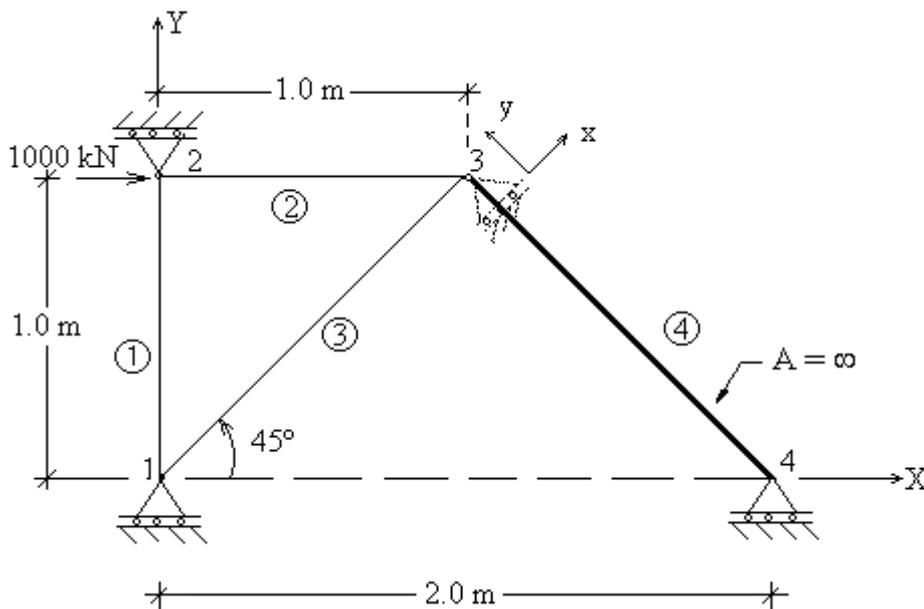


Fig.6.8 Armadura plana con apoyo inclinado con el elemento (e) añadido

Ejemplo 7

Para mostrar cómo se resuelve el problema de los apoyos inclinados de este modo, obsérvese la Fig.E7.1. En ella se muestra, de nuevo, el problema anterior, pero ahora se le ha añadido el elemento 4 cuyo eje longitudinal es perpendicular al apoyo inclinado 3, el cual se muestra en línea de puntos. La solución se obtuvo mediante el programa MEF01.for.



PROBLEMA: ARMADURA PLANA CON EL APOYO 3 INCLINADO 45° (ELEMENTO 4
AREA TRANSVERSAL=INFINITA (100×10⁹ m²))

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS.....(NN)..... = 4
 NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 4
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO.....(NGLN)..... = 2

NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE) = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN) = 2
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 3
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS.....(NNC) = 1
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS.....(NEC) = 0
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) ... = 2
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT)..... = 3

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.10000E+01
3	0.10000E+01	0.10000E+01
4	0.20000E+01	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS	CONCURRENTES	TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1
2	2	3	1
3	1	3	2
4	3	4	3

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.20000E+01	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E) = 0.21000E+12
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.60000E-03

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 2

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E) = 0.21000E+12
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.84853E-03

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 3

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E) = 0.21000E+12
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.10000E+12

CARGAS EN LOS NODOS

=====

```
NODO DIR.1 DIR.2
2 0.10000E+05 0.00000E+00
```

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```
=====
NODO DIR.1 DIR.2
1 0.00000E+00 0.00000E+00
2 0.11910E-03 0.00000E+00
3 0.39736E-04 0.39736E-04
4 0.00000E+00 0.00000E+00
```

ELEMENTO: ARMADURA PLANA

```
=====
ELEM NODO FX FY
1 1 0.0000E+00 0.0000E+00
2 2 0.0000E+00 0.0000E+00
2 2 0.1000E+05 0.0000E+00
3 3 -0.1000E+05 0.0000E+00
3 1 -0.7081E+04 0.0000E+00
3 3 0.7081E+04 0.0000E+00
4 3 0.7040E+04 0.0000E+00
4 4 -0.7040E+04 0.0000E+00
```

REACCIONES EN LOS APOYOS

```
=====
NODO REAC 1 REAC 2
1 -0.50068E+04 -0.50068E+04
2 0.10000E+05 0.00000E+00
4 -0.49780E+04 0.49780E+04
```

Nótese que las acciones de extremo de miembro del elemento 4, la fuerza axial en ese elemento es 704 kN, lo cual aproxima muy bien el resultado (707.5 kN), obtenido mediante el método usado en el ejemplo 6.

Ejemplo 8

En el caso de un pórtico plano, el elemento añadido, además de poseer una área muy grande de la sección transversal, se debe, para prevenir la flexión de este elemento, forzar a cero el momento de inercia de dicha área.

Sea el pórtico plano mostrado en la Fig.E8.1. Para todos los elementos, $E = 30 \times 10^6$ psi, $I_z = 100$ pu lg⁴, $A = 5$ pu lg². Se desea determinar los desplazamientos, las acciones de extremo de miembro y las reacciones. La solución de este problema se efectuó mediante el programa AER.

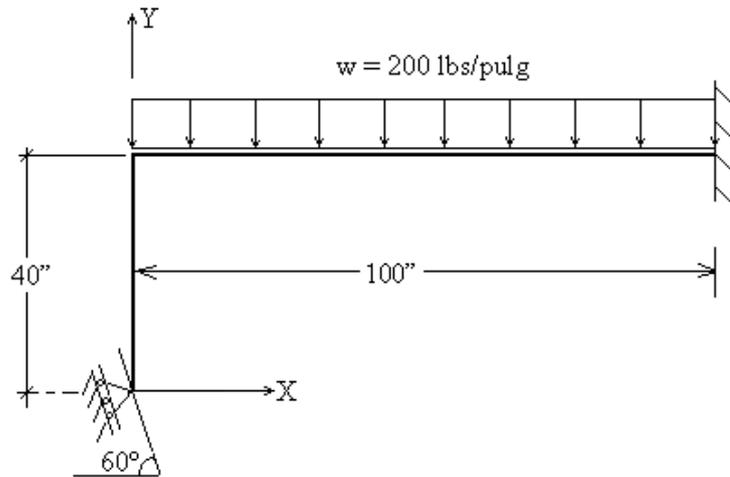


Fig.E8.1. Pórtico plano con un apoyo inclinado

La discretización del pórtico plano, con el elemento añadido cuyo eje axial es perpendicular a la dirección libre del apoyo inclinado, se muestra en la Fig.E8.2.

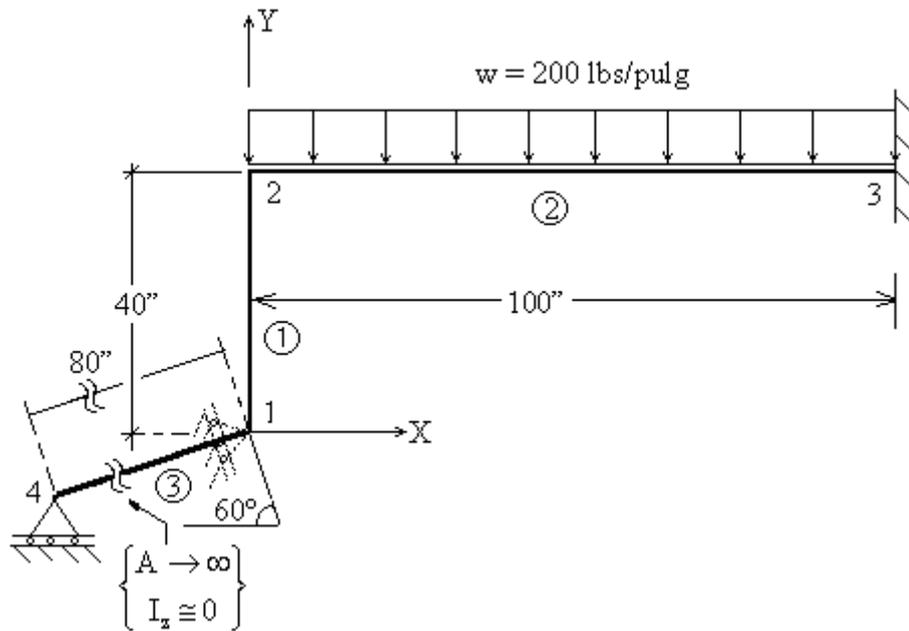


Fig.E8.2. Discretización del pórtico plano en estudio

PROBLEMA: PÓRTICO 2D EJEMPLO 8 (APOYOS INCLINADOS) CURSO AME

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS(NN)..... = 4
 NÚMERO DE ELEMENTOS(NE)..... = 3
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO.....(NGLN)..... = 3

NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN) = 2
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS.....(NNC) = 0
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS.....(NEC) = 1
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) ... = 4
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT)..... = 2

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.40000E+02
3	0.10000E+03	0.40000E+02
4	-0.69282E+02	-0.40000E+02

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES		TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1
2	2	3	1
3	1	4	2

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.20000E+01

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD(E) = 0.30000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.50000E+01
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION(CIZ) = 0.10000E+03

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 2

=====

MODULO DE ELASTICIDAD(E) = 0.30000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.10000E+10
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION(CIZ) = 0.10000E-08

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

=====

ELEM.	CAR.1	CAR.2	CAR.3	CAR.4	CAR.5	CAR.6
2	0.00000E+00	0.10000E+05	0.16667E+06	0.00000E+00	0.10000E+05	-0.16667E+06

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.48348E+00	-0.83741E+00	0.12212E-01
2	0.11504E-02	-0.83768E+00	0.11751E-01
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.24236E-01

ELEMENTO: PÓRTICO PLANO

=====

ELEM	NODO	FX	FY	MZ
1	1	0.9963E+03	-0.1726E+04	-0.2734E-04
	2	-0.9963E+03	0.1726E+04	-0.6902E+05
2	2	0.1726E+04	0.9963E+03	0.6902E+05
	3	-0.1726E+04	0.1900E+05	-0.9694E+06
3	1	0.1993E+04	0.3417E-06	0.2734E-04
	4	-0.1993E+04	-0.3417E-06	0.0000E+00

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
3	-0.17256E+04	0.19004E+05	-0.96940E+06
4	0.17256E+04	0.99627E+03	0.00000E+00

Ejemplo 9

En la Fig.E9.1 se observa el pórtico plano del ejemplo anterior, pero ahora con las condiciones de contorno indicadas. El desplazamiento vertical del nodo 3 se especifica en 1" y, en el nodo 4, se introduce un apoyo elástico tal como se muestra.

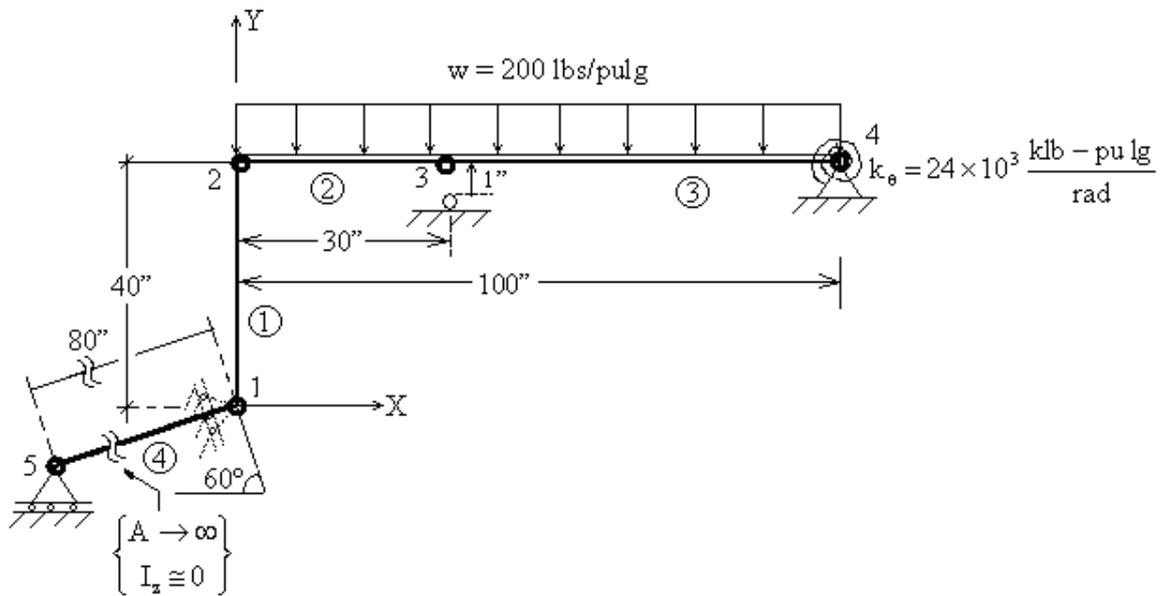


Fig.E9.1. Pórtico plano con apoyos inclinado y elástico y con desplazamiento prescrito

La solución obtenida con el programa AER y se muestra a continuación.

PROBLEMA: PÓRTICO 2D CON APOYO INCLINADO Y APOYO ELASTICO (EJEMPLO 9)

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

```

=====
NÚMERO DE NODOS .....(NN)..... = 5
NÚMERO DE ELEMENTOS .....(NE)..... = 4
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO.....(NGLN)..... = 3
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO.....(NNPE)..... = 2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO.....(NCOPN)..... = 2
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 3
NÚMERO DE NODOS CARGADOS.....(NNC)..... = 0
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS.....(NEC)..... = 2
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) ..... = 4
NÚMERO DE MATERIALES.....(NMAT)..... = 2
    
```

COORDENADAS DE LOS NODOS

```

=====
NODO      COOR. X      COOR. Y
1         0.00000E+00  0.00000E+00
2         0.00000E+00  0.40000E+02
3         0.30000E+02  0.40000E+02
4         0.10000E+03  0.40000E+02
5        -0.69282E+02 -0.40000E+02
    
```

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEMENTO  NODOS CONCURRENTES  TIPO DE MATERIAL
  1      1    2    1
  2      2    3    1
  3      3    4    1
  4      1    5    2
    
```

CONDICIONES DE CONTORNO

```

=====
NODO    DIR.1      DIR.2      DIR.3
  3  0.20000E+01 -0.10000E+01  0.20000E+01
  4  0.00000E+00  0.00000E+00  0.24000E+08
  5  0.00000E+00  0.00000E+00  0.20000E+01
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD .....(E) ..... = 0.30000E+08
AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL.....(AX) ..... = 0.50000E+01
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION .....(CIZ) ..... = 0.10000E+03
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 2

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD .....(E) ..... = 0.30000E+08
AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL.....(AX) ..... = 0.10000E+10
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION .....(CIZ) ..... = 0.10000E-08
    
```

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEM.  CAR.1    CAR.2    CAR.3
        CAR.4    CAR.5    CAR.6
  2  0.00000E+00  0.30000E+04  0.15000E+05
     0.00000E+00  0.30000E+04 -0.15000E+05

  3  0.00000E+00  0.70000E+04  0.81667E+05
     0.00000E+00  0.70000E+04 -0.81667E+05
    
```

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```

=====
NODO    DIR.1      DIR.2      DIR.3
  1  0.89930E+00 -0.15576E+01  0.23227E-01
  2  0.68691E-02 -0.15592E+01  0.20479E-01
  3  0.48083E-02 -0.10000E+01  0.16950E-01
  4  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11781E-01
  5  0.00000E+00  0.00000E+00 -0.45337E-01
    
```

ELEMENTO: PÓRTICO PLANO

=====

ELEM	NODO	FX	FY	MZ
1	1	0.5949E+04	-0.1030E+05	-0.5143E-04
	2	-0.5949E+04	0.1030E+05	-0.4121E+06
2	2	0.1030E+05	0.5949E+04	0.4121E+06
	3	-0.1030E+05	0.5124E+02	-0.3237E+06
3	3	0.1030E+05	0.7585E+04	0.3237E+06
	4	-0.1030E+05	0.6415E+04	-0.2827E+06
4	1	0.1190E+05	0.6428E-06	0.5142E-04
	5	-0.1190E+05	-0.6428E-06	0.1355E-19

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
3	0.45475E-10	0.76362E+04	-0.31432E-08
4	-0.10304E+05	0.64151E+04	-0.28274E+06
5	0.10304E+05	0.59488E+04	0.13553E-19

6.6.- Combinación de diferentes elementos en un modelo estructural

Algunas veces, para poder analizar una estructura, se hace necesario combinar diferentes tipos de elementos. Como un ejemplo de esta situación, en la Fig.6.8 se muestra un pórtico tensado por elementos de armadura plana.

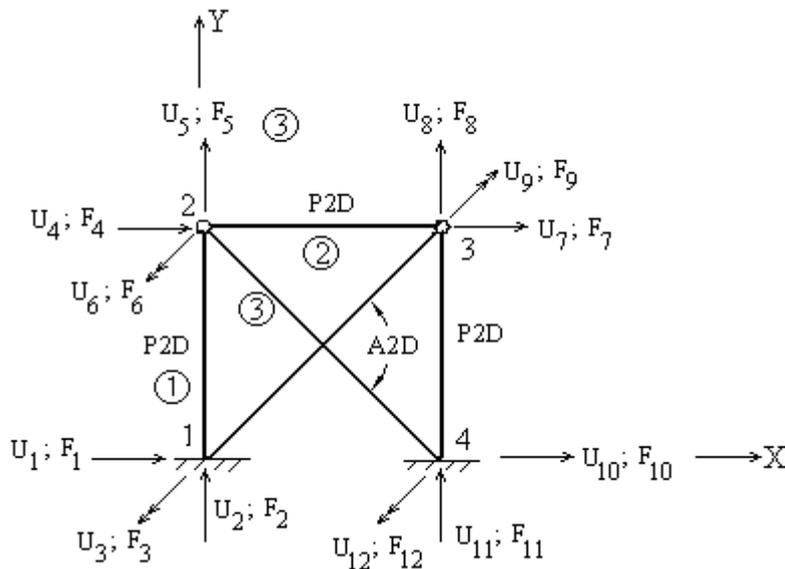


Fig.6.8 Estructura con diferentes tipos de elementos

En el nodo 2 se nota que habrá contribuciones de los coeficientes de rigidez de los elementos 1 y 2 (pórticos planos; P2D) y del elemento 3 (armadura plana; A2D), a la matriz global de rigidez. Puesto que los elementos pórticos

planos tienen 3 grados de libertad por nodo (dos traslaciones y una rotación), y el elemento armadura plana sólo 2 grados de libertad por nodo (dos traslaciones), es necesario asegurar que las contribuciones de los coeficientes de rigidez del elemento armadura plana, a la matriz global de rigidez, vayan a las posiciones correctas de la misma. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento a seguir.

Ejemplo 10

Se desea determinar los desplazamientos y las acciones de extremo de miembro de la estructura mostrada en la Fig.E9.1. Los elementos 1 y 2 son del tipo pórtico plano y el elemento 3 es un elemento de armadura plana. Para los elementos pórtico plano: $E=29 \times 10^6$ psi, $I_z=100$ pulg⁴, $A=20$ pulg². Para el elemento de armadura plana $E=29 \times 10^6$ psi y $A=2$ pulg².

Las matrices locales de rigidez, de los elementos, referidas al sistema global de referencia, vienen dadas por:

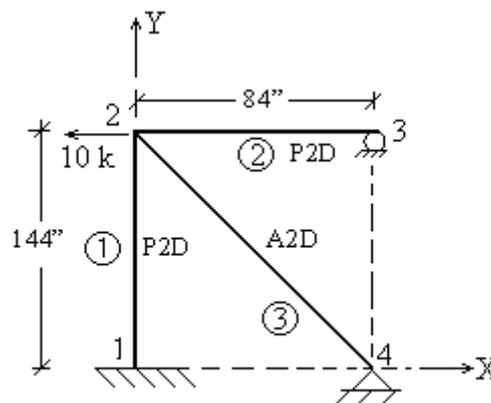


Fig.E10.1. Estructura con elementos P2D y A2D

Elemento 1

$$[R]^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ -1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & -1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{(1)}[k] = \begin{bmatrix} 4027.28 & 0.0 & 0.0 & -4027.28 & 0.0 & 0.0 \\ & 11.65 & 389.12 & 0.0 & -11.65 & 839.12 \\ & & 80555.55 & 0.0 & -839.12 & 4027.78 \\ & & & 4027.78 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & & 11.65 & -839.12 \\ & & & & & 80555.55 \end{bmatrix}$$

$${}^{(1)}[K] = [R]^{(1)T} [k] [R]^{(1)}$$

$$= \begin{matrix} & (1) & (2) & (3) & (4) & (5) & (6) \\ \begin{bmatrix} 11.65 & 0.0 & -839.12 & -11.65 & 0.0 & -839.12 \\ & 4027.78 & 0.0 & 0.0 & -4027.78 & 0.0 \\ & & 80555.55 & 839.12 & 0.0 & 4027.78 \\ & & & 11.65 & 0.0 & 839.12 \\ \text{Simétrica} & & & & 4027.78 & 0.0 \\ & & & & & 80555.55 \end{bmatrix} & \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix} \end{matrix}$$

Elemento 2

$${}^{(2)}[R] = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{(2)}[k] = \begin{bmatrix} 6904.76 & 0.0 & 0.0 & -6904.76 & 0.0 & 0.0 \\ & 58.71 & 2465.99 & 0.0 & -58.71 & 2465.99 \\ & & 138095.2 & 0.0 & -2465.99 & 69047.62 \\ & & & 6904.76 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & & & 58.71 & -2465.99 \\ & & & & & 138095.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} (4) & (5) & (6) & (7) & (8) & (9) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{[K]}^{(2)} = \mathbf{[R]}^{(2)T} \mathbf{[k]}^{(2)} \mathbf{[R]}^{(2)} \\
 = & \left[\begin{array}{cccccc}
 6904.76 & 0.0 & 0.0 & -6904.76 & 0.0 & 0.0 & (4) \\
 & 58.71 & 2465.99 & 0.0 & -58.71 & 2465.99 & (5) \\
 & & 138095.2 & 0.0 & -2465.99 & 69047.62 & (6) \\
 & & & 6904.76 & 0.0 & 0.0 & (7) \\
 & \text{Simétrica} & & & 58.71 & -2465.99 & (8) \\
 & & & & & 138095.2 & (9)
 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Elemento 3

$$\mathbf{[R]}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0.504 & -0.864 & 0.0 & 0.0 \\ 0.864 & 0.504 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.504 & -0.864 \\ 0.0 & 0.0 & 0.864 & 0.504 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{[k]}^{(3)} = \begin{bmatrix} 384.0 & 0.0 & -384.0 & 0.0 \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & 384.0 & 0.0 \\ & & & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{[K]}^{(3)} = \mathbf{[R]}^{(3)T} \mathbf{[k]}^{(3)} \mathbf{[R]}^{(3)} = \begin{bmatrix} & (4) & (5) & (10) & (11) \\
 & 88.33 & -151.42 & -88.33 & 151.42 & (4) \\
 & & 259.58 & 151.42 & -259.58 & (5) \\
 \text{Simétrica} & & & 88.33 & -151.42 & (10) \\
 & & & & 259.58 & (11) \end{bmatrix}$$

En la matriz local de rigidez, referida al sistema global, se muestra la numeración global de los desplazamientos nodales. Nótese que los coeficientes de rigidez del elemento de armadura plana, contribuirán, a la matriz global, en las filas y columnas 3 x núm. nodo - 2, y 3 x num. nodo - 1 (i.e; las componentes de traslación de los desplazamientos nodales); es decir:

<u>Nodo 2</u>	<u>Nodo 4</u>
3 x 2 - 2	3 x 4 - 2 =
= 4	10
3 x 2 - 1	3 x 4 - 1 =
= 5	11

En aras de simplificar la solución manual del sistema de ecuación resultante (después del respectivo ensamblaje de las matrices $[K_i]$), la matriz global reducida de la estructura (es decir; después del montaje de los elementos y removiendo las filas y columnas asociadas a los desplazamientos conocidos, en la matriz global) es:

$$\left[\begin{array}{ccccc} 7004.75 & -151.42 & 839.12 & -6904.76 & 0.0 \\ & 4346.07 & 2465.99 & 0.0 & 2465.99 \\ & & 218650.75 & 0.0 & 69047.62 \\ \text{Simétrica} & & & 6904.76 & 0.0 \\ & & & & 138095.20 \end{array} \right] \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \times 10^3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nótese que el vector de cargas nodales será nulo excepto en $F_4 = 10 \text{ kilb}$. Así, la solución del sistema de ecuaciones resultante es:

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.110592'' \\ -0.004045'' \\ 0.0005310'' \\ -0.110592'' \\ -0.000193'' \end{Bmatrix}$$

Los desplazamientos nodales del elemento de armadura plana se muestran en la Fig. y vienen dados por:

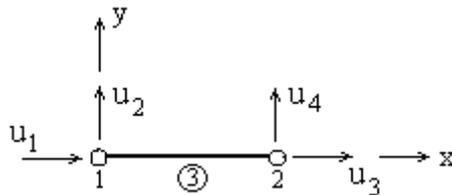


Fig.E10.2 Desplazamientos nodales del elemento de armadura plana

$$\{u\}^{(3)} = [R] \{U\}^{(3)}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(3)} \\ u_2^{(3)} \\ u_3^{(3)} \\ u_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.504 & -0.864 & 0.0 & 0.0 \\ 0.864 & 0.504 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.504 & -0.864 \\ 0.0 & 0.0 & 0.864 & 0.504 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.110592 \\ -0.004045 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0522435'' \\ -0.09759'' \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Las fuerzas de extremo de miembro para este elemento se determinan mediante:

$$\{f\}^{(3)} = [k]^{(3)} \{u\}^{(3)}$$

es decir:

$$\begin{Bmatrix} f_1^{(3)} \\ f_2^{(3)} \\ f_3^{(3)} \\ f_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 384.0 & 0.0 & -384.0 & 0.0 \\ & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \text{Simétrica} & & 384.0 & 0.0 \\ & & & 0.0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0522435 \\ -0.09759 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.1817E+05 \\ 0.0 \\ 0.1817E+05 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

Las acciones de extremo de miembro obtenidas se muestran en la Fig.E10.3



Fig.E10.3 Acciones de extremo de miembro del elemento 3

Un procedimiento alternativo al descrito, consiste en tratar todos los elementos como si fueran elementos de pórticos planos, haciendo con que la “inercia” de los elementos armaduras de armadura plana sea muy pequeña comparada con la inercia de los elementos de pórtico plano.

A continuación se presenta la solución de este problema obtenida mediante el programa AER, considerando toda la estructura constituida por elementos del tipo pórtico plano, donde el elemento 3 tiene una “inercia” de $0.1 \times 10^{-3} \text{ pu l g}^4$. Nótese que el valor de la fuerza axial de este elemento es igual a la encontrada anteriormente, y que el valor de la fuerza cortante y del momento flector es, comparativamente, con el valor de la fuerza axial, igual a cero, tal como en efecto debe ser.

PROBLEMA: PÓRTICO PLANO CON UN ELEMENTO DE ARMADURA PLANA.

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS(NN) = 4
 NÚMERO DE ELEMENTOS(NE) = 3
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO ..(NGLN) = 3
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE) = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN) = 2

NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP) = 3
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS(NNC) = 1
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS(NEC)..... = 0
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) = 4
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT) = 2

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.14400E+03
3	0.84000E+02	0.14400E+03
4	0.84000E+02	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES	TIPO DE MATERIAL
1	1 2 3	1
2	2 3 4	1
3	2 4	2

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.20000E+01	0.00000E+00	0.20000E+01
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.20000E+01

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.20000E+02
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION(CIZ) = 0.10000E+03

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 2

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL(AX) = 0.20000E+01
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION(CIZ) = 0.10000E-03

CARGAS EN LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
2	-0.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
------	-------	-------	-------

1	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
2	-0.11060E+00	-0.40451E-02	0.53112E-03
3	-0.11060E+00	0.00000E+00	-0.19333E-03
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.61236E-03

ELEMENTO: PÓRTICO PLANO

=====

ELEM	NODO	FX	FY	MZ
1	1	0.1629E+05	-0.8433E+03	-0.7141E+05
	2	-0.1629E+05	0.8433E+03	-0.5002E+05
2	2	0.0000E+00	0.5955E+03	0.5002E+05
	3	0.0000E+00	-0.5955E+03	0.3638E-11
3	2	-0.1817E+05	-0.1695E-04	-0.2826E-02
	4	0.1817E+05	0.1695E-04	0.0000E+00

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
1	0.84330E+03	0.16293E+05	-0.71414E+05
3	0.00000E+00	-0.59549E+03	0.36380E-11
4	0.91567E+04	-0.15697E+05	0.00000E+00

6.7.- Condensación estática

El término condensación se refiere a la contracción del tamaño de un sistema de ecuaciones mediante la eliminación ciertos grados de libertad. Las ecuaciones condensadas se expresan entonces en términos de los grados de libertad pre-seleccionados $\{U_s\}$, los cuales, conjuntamente con los las cantidades eliminadas $\{U_p\}$, conforman el conjunto de grados de libertad original; es decir:

$$\{U\} = \{U_p\} + \{U_s\} \quad (6.7.1)$$

Matemáticamente, el proceso tiene la forma original del conjunto de ecuaciones algebraicas:

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (6.7.2)$$

el cual puede expresarse en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_p\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix} \quad (6.7.3)$$

Esta "partición de la matriz global del sistema, separa las variables "primarias" (designadas por el suscrito p), de las variables "secundarias" (designadas por el suscrito s). La condensación estática tiene por finalidad

eliminar los desplazamientos secundarios (conocidos), de esta ecuación matricial. Expandiendo la ecuación anterior, se obtiene:

$$[K_{pp}]\{U_p\} + [K_{ps}]\{U_s\} = \{F_p\} \quad (6.7.4a)$$

$$[K_{sp}]\{U_p\} + [K_{ss}]\{U_s\} = \{F_s\} \quad (6.7.4b)$$

De la ec.(6.7.4b) se puede escribir:

$$\{U_s\} = [K_{ss}]^{-1} \{ \{F_s\} - [K_{sp}]\{U_p\} \} \quad (6.7.5)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ec.(6.7.4.a), resulta:

$$\{F_p\} = [K_{pp}]\{U_p\} + [K_{sp}][K_{ss}]^{-1} \{ \{F_s\} - [K_{sp}]\{U_p\} \} \quad (6.7.6)$$

Esta ecuación puede reescribirse de la siguiente forma.

$$\{F_p\} - [K_{ps}][K_{ss}]^{-1}\{F_s\} = [[K_{pp}] - [K_{ps}][K_{ss}]^{-1}[K_{sp}]] \{U_p\} \quad (6.7.7)$$

es decir:

$$\{F\}_{\text{CONDENSADO}} = [K]_{\text{CONDENSADO}} \{U\}_{\text{CONDENSADO}} \quad (6.7.8)$$

Una vez resuelta la ec.(6.7.7), se obtiene, mediante la ec.(6.7.5), el vector $\{U_s\}$. Nótese que las matrices a invertir mediante este método son de menor orden que la matriz global del sistema. Sin embargo, como se puede notar, existe una gran cantidad de operaciones envueltas en las multiplicaciones de las matrices indicadas en la ec.(6.7.7). El tamaño del problema a resolver determinará la ventaja o desventaja de usar este método.

Ejemplo 1

Supóngase que se desea analizar la viga mostrada en la Fig.E.1 mediante la técnica de la condensación estática. Tal como se puede ver, la viga se ha discretizado en dos elementos. Las propiedades mecánicas y geométricas son: $E = 29 \times 10^6$ psi y $I_z = 300$ pu lg⁴.

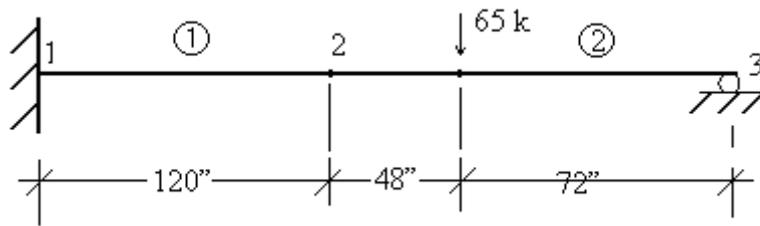


Fig.E.1. Viga de eje recto a analizar mediante condensación estática

De acuerdo con la topología establecida, las matrices locales de rigidez de los elementos son:

Elemento 1:

$$\begin{matrix}
 {}^{(1)}[k] = & \begin{bmatrix}
 0.604E + 05 & 0.363E + 07 & -0.604E + 05 & 0.363E + 07 \\
 & 0.290E + 09 & -0.363E + 07 & 0.145E + 09 \\
 \text{Simétrica} & & 0.604E + 05 & -0.363E + 07 \\
 & & & 0.290E + 09
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

Elemento 2:

$$\begin{matrix}
 {}^{(2)}[k] = & \begin{bmatrix}
 0.604E + 05 & 0.363E + 07 & -0.604E + 05 & 0.363E + 07 \\
 & 0.290E + 09 & -0.363E + 07 & 0.145E + 09 \\
 \text{Simétrica} & & 0.604E + 05 & -0.363E + 07 \\
 & & & 0.290E + 09
 \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

La matriz global de la estructura es:

$$[K] = \begin{bmatrix}
 0.604E + 05 & 0.363E + 07 & -0.604E + 05 & 0.363E + 07 & 0.0 & 0.0 \\
 & 0.290E + 09 & -0.363E + 07 & 0.145E + 09 & 0.0 & 0.0 \\
 & & 0.121E + 06 & 0.000E + 00 & -0.604E + 05 & 0.363E + 07 \\
 & & & 0.580E + 09 & -0.363E + 07 & 0.145E + 09 \\
 \text{Simétrica} & & & & 0.604E + 05 & -0.363E + 07 \\
 & & & & & 0.290E + 09
 \end{bmatrix}$$

Los desplazamientos nodales posibles de la viga se muestra en la Fig.E.2; de acuerdo con las condiciones de apoyo de la misma, se infiere que: $U_1 = U_2 = U_5 = 0$.

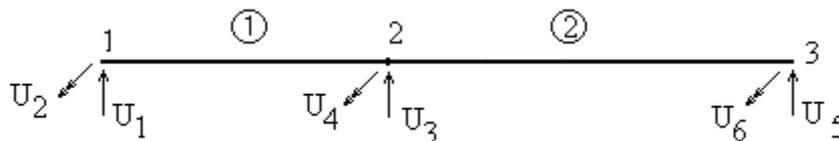


Fig.E.2. Desplazamientos nodales de la estructura.

y la matriz global de la estructura queda, entonces, reducida a:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 0.121\text{E} + 06 & 0.0 & 0.363\text{E} + 07 \\ & 0.580\text{E} + 09 & 0.145\text{E} + 09 \\ \text{Simétrica} & & 0.290\text{E} + 09 \end{bmatrix}$$

Y, por lo tanto, el sistema global de ecuaciones de la estructura es:

$$\begin{bmatrix} 0.121\text{E} + 06 & 0.0 & 0.363\text{E} + 07 \\ & 0.580\text{E} + 09 & 0.145\text{E} + 09 \\ \text{Simétrica} & & 0.290\text{E} + 09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.421\text{E} + 05 \\ -0.112\text{E} + 07 \\ 0.749\text{E} + 06 \end{Bmatrix}$$

Para resolver este problema mediante el procedimiento de condensación estática, se seleccionará U_3 como una variable secundaria. Luego, el reordenamiento de este sistema de ecuaciones, de acuerdo con la ec.(6.7.3), viene dado por:

$$\begin{bmatrix} 0.580\text{E} + 09 & 0.145\text{E} + 09 & 0.0 \\ & 0.290\text{E} + 09 & 0.363\text{E} + 07 \\ \text{Simétrica} & & 0.121\text{E} + 06 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_6 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.112\text{E} + 07 \\ 0.749\text{E} + 06 \\ -0.421\text{E} + 05 \end{Bmatrix}$$

De la ec.(6.7.7) se obtiene el vector $\{F\}_c$; es decir:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} -0.112\text{E} + 07 \\ 0.749\text{E} + 06 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.363\text{E} + 07 \end{Bmatrix} \frac{(-0.421\text{E} + 05)}{0.121\text{E} + 06} = \begin{Bmatrix} -0.11232\text{E} + 07 \\ 0.20124\text{E} + 07 \end{Bmatrix}$$

y

$$[\mathbf{K}]_c = \begin{bmatrix} 0.580\text{E} + 09 & 0.145\text{E} + 09 \\ 0.145\text{E} + 09 & 0.121\text{E} + 06 \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.363\text{E} + 07 \end{Bmatrix} \frac{1.0}{0.121\text{E} + 06} \begin{Bmatrix} 0.0 & 0.121\text{E} + 06 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.580\text{E} + 09 & 0.145\text{E} + 09 \\ 0.145\text{E} + 09 & 0.183\text{E} + 09 \end{bmatrix}$$

y, finalmente, de acuerdo con la ec.(6.7.8), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.580\text{E} + 09 & 0.145\text{E} + 09 \\ 0.145\text{E} + 09 & 0.183\text{E} + 09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.11232\text{E} + 07 \\ 0.20124\text{E} + 07 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} U_4 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.005890'' \\ 0.015815'' \end{Bmatrix}$$

La solución de este problema mediante el programa AER se muestra a continuación.

PROBLEMA: VIGA DE EJE RECTO PARA EJEMPLO DE CONDENSACION ESTATICA

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

```

=====
NÚMERO DE NODOS.....(NN) ..... = 3
NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE) ..... = 2
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO (NGLN) ..... = 2
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO .....(NNPE) ..... = 2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO .....(NCOPN) ..... = 1
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP) ..... = 2
NÚMERO DE NODOS CARGADOS .....(NNC) ..... = 0
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS .....(NEC)..... = 1
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) ..... = 3
NÚMERO DE MATERIALES .....(NMAT) ..... = 1
    
```

COORDENADAS DE LOS NODOS

```

=====
NODO      COOR. X
1         0.00000E+00
2         0.12000E+03
3         0.24000E+03
    
```

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEMENTO  NODOS CONCURRENTES  TIPO DE MATERIAL
1         1     2         1
2         2     3         1
    
```

CONDICIONES DE CONTORNO

```

=====
NODO      DIR.1      DIR.2
1         0.00000E+00  0.00000E+00
3         0.00000E+00  0.20000E+01
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIZ) ..... = 0.30000E+03
    
```

CARGAS EN LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEM.    CAR.1      CAR.2
          CAR.3      CAR.4
2        0.42120E+05  0.11232E+07
          0.22880E+05  -0.74880E+06
    
```

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```
=====
NODO  DIR.1    DIR.2
  1    0.00000E+00  0.00000E+00
  2   -0.82303E+00 -0.58903E-02
  3    0.00000E+00  0.15815E-01
```

ELEMENTO: VIGA DE EJE RECTO

```
=====
ELEM  NODO    FY      MZ
  1    1     0.2837E+05  0.2129E+07
      2    -0.2837E+05  0.1275E+07
  2    2     0.2837E+05 -0.1275E+07
      3     0.3663E+05  0.0000E+00
```

REACCIONES EN LOS APOYOS

```
=====
NODO  REAC 1    REAC 2
  1    0.28373E+05  0.21294E+07
  3    0.36628E+05  0.00000E+00
```

6.8.- Sub-estructuras

La idea de dividir una estructura en varias sub-estructuras, de tal forma que el análisis de cada una de éstas por separado, permita obtener la solución de la estructura original, tiene su origen en el “método de separación”, ideado por el ingeniero húngaro Gabriel Kron (1901-19689), para el análisis de circuitos eléctricos y estructuras elásticas en forma de sub-espacios, en 1963. Más tarde, Kron denominó este método “diakoptico”, que en griego significa “romper”; también se le conoce como el método de las sub-estructuras en ingeniería estructura.

Cuando se desea analizar una estructura muy grande (aviones, domos, puentes, rascacielos, barcos, etc.), se generan, muy frecuentemente, cientos de miles de grados de libertad; es decir, cientos de miles de ecuaciones algebraicas simultáneas. Para resolver un sistema de esta magnitud, puede ser que las facilidades computacionales disponibles sean inadecuadas. Un procedimiento que contorna la dificultad que puede presentar el análisis de una estructura como un unidad, lo constituye la técnica de sub-estructuración, la cual, como su nombre lo indica, consiste en dividir la estructura original en varias estructuras más pequeñas (sub-estructuras), cada una de las cuales se analiza por separado.

Para ilustrar el procedimiento considérese la estructura mostrada en la Fig. 6.9.

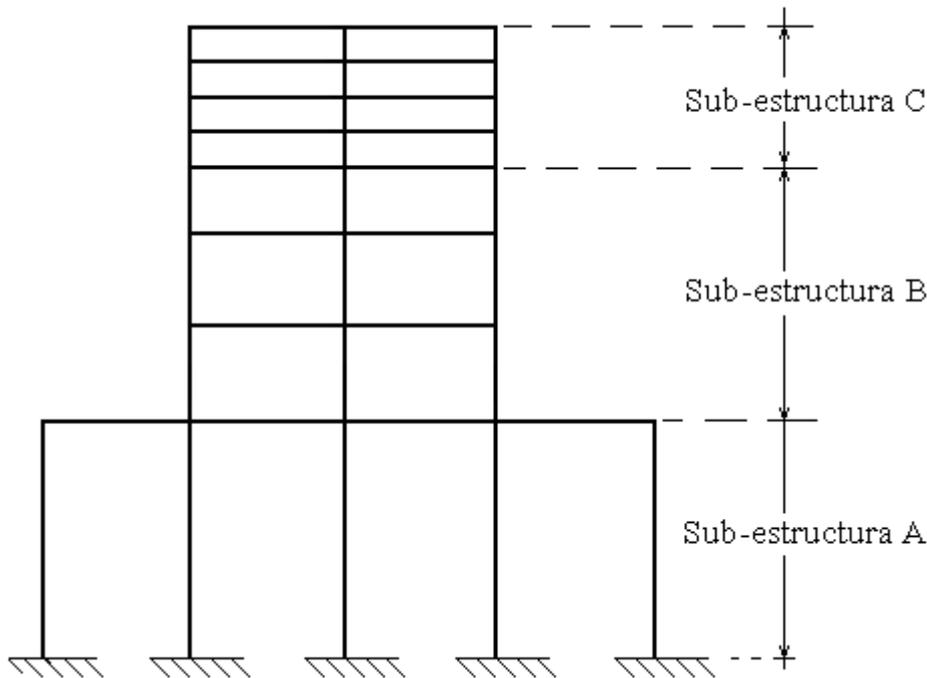
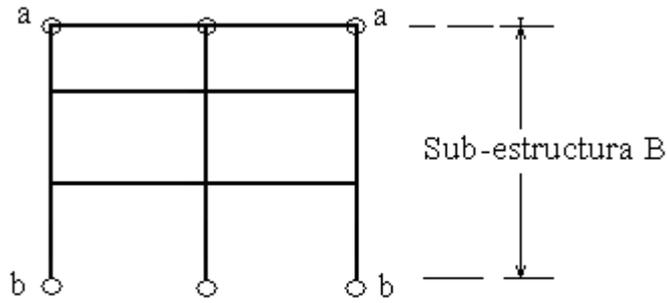


Fig.6.9 Estructura original

A modo de ejemplo, se dividirá esta estructura en tres sub-estructuras, tal como se muestra en la Fig.6.10. Supóngase que los grados de libertad de los nodos de la interfase de cada sub-estructura de la figura anterior se seleccionan como las cantidades “primarias”, y se hace uso de la condensación estática a cada sub-estructura. Las matrices de rigidez condensadas resultantes serán mucho más pequeñas que las matrices de rigidez obtenidas considerando todos los grados distintos de cero. Por ejemplo, la matriz de rigidez de la sub-estructura A se reducirá de 12×12 a una matriz de 3×3 . De igual modo, las sub-estructuras B y C, se reducirán de 18×18 e 12×12 y de 18×18 a 9×9 . Como ya se estableció en la sección anterior, se puede combinar el vector de cargas reducido y estas matrices de rigidez condensadas para forzar el equilibrio estático en los nodos de la interfaz.

El análisis de la sub-estructura B, mostrada en la Fig.6.10, ejemplificará el procedimiento del estudio de una sub-estructura general. En esta sub-estructura se incluyen las vigas en la parte superior (a-a), pero las vigas de la parte inferior (b-b) se incluyen en la sub-estructura A. Sin embargo, las vigas de la parte superior pudieron haberse incluido en la sub-estructura C y las vigas de la parte inferior en la sub-estructura B.

Las relaciones fuerza-desplazamiento para la sub-estructura B se ordenan de tal modo que los desplazamientos y fuerzas de los nodos situados en las interfases queden separados de aquellos situados en el interior de la sub-estructura; es decir:



○ nodos “i” en la interfase

$$\begin{Bmatrix} \{F_i^B\} \\ \{F_e^B\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ii}^B] & [K_{ie}^B] \\ [K_{ei}^B] & [K_{ee}^B] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_i^B\} \\ \{U_e^B\} \end{Bmatrix} \quad (6.8.1)$$

donde el supra-índice B indica la sub-estructura en estudio, y el subíndice i denota los desplazamientos y fuerzas de los nodos que están situados en la interfase y el subíndice e denota los desplazamientos y fuerzas de los nodos que están en el interior de la sub-estructura que serán eliminados mediante la condensación estática. La ecuación anterior se escribe como:

$$\{F_i^B\} = [K_{ii}^B] \{U_i^B\} + [K_{ie}^B] \{U_e^B\} \quad (6.8.2)$$

$$\{F_e^B\} = [K_{ei}^B] \{U_i^B\} + [K_{ee}^B] \{U_e^B\} \quad (6.8.3)$$

de la ec.(6.8.3) se pueden eliminar los desplazamientos de los nodos que están situados en el interior de la sub-estructura, despejando, de esta ecuación $\{U_e^B\}$; es decir:

$$\{U_e^B\} = [K_{ee}^B]^{-1} [\{F_e^B\} - [K_{ei}^B] \{U_i^B\}] \quad (6.8.4)$$

Sustituyendo esta ecuación en la ec.(6.8.2), se obtiene:

$$\{F_i^B\} - [K_{ie}^B] [K_{ee}^B]^{-1} \{F_e^B\} = ([K_{ii}^B] - [K_{ie}^B] [K_{ee}^B]^{-1} [K_{ei}^B]) \{U_i^B\} \quad (6.8.5)$$

Sea ahora:

$$\{\bar{F}_i^B\} = [K_{ie}^B] [K_{ee}^B]^{-1} \{F_e^B\} \quad (6.8.6a)$$

$$[\bar{K}_{ii}^B] = [K_{ii}^B] - [K_{ie}^B] [K_{ee}^B]^{-1} [K_{ei}^B] \quad (6.8.6b)$$

Sustituyendo las ec.(6.8.6) en la ec(6.8.5), se obtiene:

$$\{F_i^B\} - \{\bar{F}_i^B\} = [\bar{K}_{ii}^B] \{U_i^B\} \quad (6.8.7)$$

Siguiendo idéntico procedimiento se obtienen ecuaciones similares para las sub-estructuras A y C; es decir:

$$\{F_i^A\} - \{\bar{F}_i^A\} = [\bar{K}_{ii}^A] \{U_i^A\} \quad (6.8.8)$$

$$\{F_i^C\} - \{\bar{F}_i^C\} = [\bar{K}_{ii}^C] \{U_i^C\} \quad (6.8.9)$$

En este procedimiento, por supuesto, se deben verificar las condiciones las condiciones de compatibilidad de los desplazamientos de los nodos situados en la interfase; es decir se debe verificar que:

$$\{U_i^A\}_{\text{Superior}} = \{U_i^B\}_{\text{Inferior}} \quad (6.8.10a)$$

$$\{U_i^B\}_{\text{Superior}} = \{U_i^C\}_{\text{Inferior}} \quad (6.8.10b)$$

En otras palabras los desplazamientos de los nodos situados en la interfase deben tener el mismo valor independientemente de la sub-estructura a la cual pertenecen.

La respuesta de la estructura original puede ahora obtenerse mediante la superposición directa de las ecs.(6.8.7), (6.8.8) y (6.8.9), donde las ecuaciones finales quedan expresadas en términos de los desplazamientos de los desplazamientos de los nodos situados en la interfase únicamente (6 en este caso), como:

$$\{F_i\} - \{\bar{F}_i\} = [\bar{K}_{ii}] \{U_i\} \quad (6.11)$$

La solución de la ec.(6.11) proporcionará los desplazamientos de los nodos de la interfase. Los desplazamientos de los nodos en el interior la sub-estructura B, se determinan mediante la ec.(6.8.4). Para los desplazamientos en en el interior de las sub-estructuras A y C se utilizan expresiones similares. El siguiente ejemplo ilustrará el procedimiento descrito.

Ejemplo 1

Supóngase que se desea determinar los desplazamientos del nodo 3 de la viga mostrada en la Fig.E.1.1. $E = 29 \times 10^6$ psi y $I_z = 1000$ pulg⁴.

La viga se dividirá la viga en los dos sub-estructuras mostradas en la Fig.E.1.2. Como se puede notar, la fuerza de de 10 k se ha asignado al nodo 3 de la sub-estructura 2, pero también se la ha podido asignar a la sub-estructura1 o, aún, se ha podido decidir decidir asignar una fracción de la misma a cada sub-estructura

Las matrices locales de rigidez de cada elemento de la viga viene dada por:

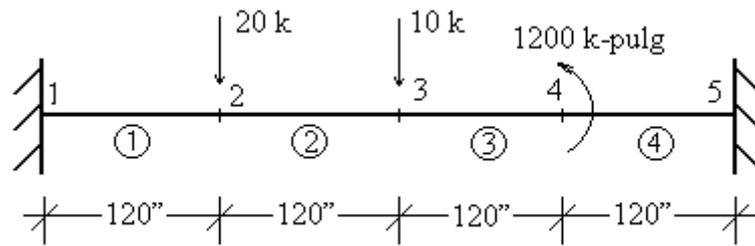
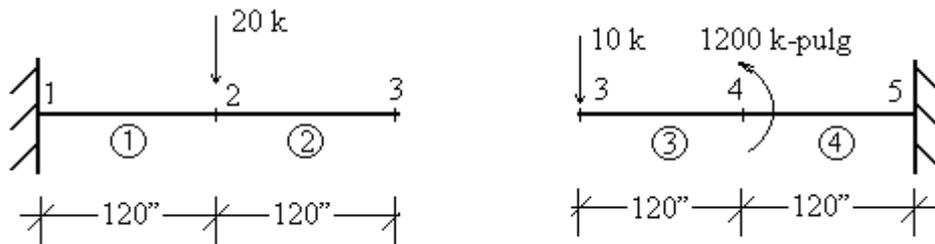


Fig.E.1.1. Viga doblemente empotrada original.

$$[k]^{(i)} = \begin{bmatrix} 0.201E+06 & 0.121E+08 & -0.201E+06 & 0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.967E+09 & -0.121E+08 & 0.483E+09 \\ -0.201E+06 & -0.121E+08 & 0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 & -0.121E+08 & 0.967E+09 \end{bmatrix} \quad (1)$$

para $i = 1, 2, 3, 4$



Sub-estructura 1

Sub-estructura 2

Fig.E.1.2. Sub-estructuras de la viga original.

Para la sub-estructura 1, la matriz global de rigidez, una vez que se han eliminado las ecuaciones asociadas a las direcciones de los desplazamientos conocidos en el nodo 1 (es decir: $U_1 = U_2 = 0$), viene dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.403E+06 & 0.0 & -0.201E+06 & 0.121E+08 \\ 0.0 & 0.193E+10 & -0.121E+08 & 0.483E+09 \\ -0.201E+06 & -0.121E+08 & 0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 & -0.121E+08 & 0.967E+09 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Luego, el sistema de ecuaciones asociado a esta matriz global, se escribe:

$$\begin{bmatrix} 0.403E+06 & 0.0 & -0.201E+06 & 0.121E+08 \\ 0.0 & 0.193E+10 & -0.121E+08 & 0.483E+09 \\ -0.201E+06 & -0.121E+08 & 0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 & -0.121E+08 & 0.967E+09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -20k \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Reescribiendo este sistema de ecuaciones de acuerdo con la ec.(6.8.1), se tiene:

$$\begin{bmatrix} 0.201E+06 & -0.121E+08 & -0.201E+06 & -0.121E+08 \\ -0.121E+08 & 0.967E+09 & 0.121E+08 & 0.483E+09 \\ -0.201E+06 & 0.121E+08 & 0.403E+06 & 0.0 \\ -0.121E+08 & 0.483E+09 & 0.0 & 0.193E+10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -20k \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Luego, las sub-matrices y vectores de la ec.(6.8.1) son:

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} 0.201E+06 & -0.121E+08 \\ -0.121E+08 & 0.967E+09 \end{bmatrix} \quad [K_{ie}] = \begin{bmatrix} -0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix} \quad (5.a)$$

$$[K_{ei}] = \begin{bmatrix} -0.201E+06 & 0.121E+08 \\ -0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix} \quad [K_{ee}] = \begin{bmatrix} 0.403E+06 & 0.0 \\ 0.0 & 0.193E+10 \end{bmatrix}$$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad \{F_e\} = \begin{Bmatrix} -20.0E+03 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad (5.b)$$

Sustituyendo las ec.(5) en la ec.(6.8.5)

$$([K_{ii}] - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}[K_{ei}])\{U_i\} = \{F_i\} - [K_{ie}][K_{ee}]^{-1}\{F_e\}$$

se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0.201E+06 & -0.121E+08 \\ -0.121E+08 & 0.967E+09 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.201E+06 & 0.121E+08 \\ -0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.201E+06 & -0.121E+08 \\ 0.121E+08 & 0.483E+09 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.403E+06 & 0.0 \\ 0.0 & 0.193E+10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -20.0E+03 \\ 0.0 \end{Bmatrix}$$

el resultado es:

$$\begin{bmatrix} 25.174E + 05 & -0.302083E + 07 \\ -0.302083E + 07 & 0.474942E + 09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.0 + E03 \\ 600.0E + 03 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Para la sub-estructura 2, una vez eliminadas las ecuaciones asociadas a los desplazamientos conocidos del nodo 5 (es decir: $U_9 = U_{10} = 0$), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0.201E + 06 & 0.121E + 08 & -0.201E + 06 & 0.121E + 08 \\ 0.121E + 08 & 0.967E + 09 & -0.121E + 08 & 0.483E + 09 \\ -0.201E + 06 & -0.121E + 08 & 0.403E + 06 & 0.0 \\ 0.121E + 08 & 0.483E + 09 & 0.0 & 0.193E + 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -10.0k \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Ahora, las sub-matrices y vectores de la ec.(6.8.1) son:

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} 0.201E + 06 & 0.121E + 08 \\ 0.121E + 08 & 0.967E + 09 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ic}] = \begin{bmatrix} -0.201E + 06 & 0.121E + 08 \\ -0.121E + 08 & 0.483E + 09 \end{bmatrix} \quad (8.a)$$

$$[K_{ei}] = \begin{bmatrix} -0.201E + 06 & -0.121E + 08 \\ 0.121E + 08 & 0.483E + 09 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ee}] = \begin{bmatrix} 0.403E + 06 & 0.0 \\ 0.0 & 0.193E + 10 \end{bmatrix}$$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} -10.0E + 03 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad \{F_e\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 1200.0E + 03 \end{Bmatrix}$$

$$\{U_i\} = \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} \quad (8.b)$$

Sustituyendo, como en el caso de la sub-estructura 1, las ecs.(8) en la ec.(6.8.5), se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 25.174E + 05 & 0.302083E + 07 \\ 0.302083E + 07 & 0.474942E + 09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -17.5 + E03 \\ -300.0E + 03 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Finalmente, sumando la ec.(6) con la ec.(9) se obtiene el sistema de ecuaciones que permite determinar las componentes del desplazamiento en el nodo de la interfase de las dos sub-estructuras; es decir, en el nodo 3.

$$\begin{bmatrix} 50.348E + 05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.949884E + 09 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -27.5 + E03 \\ 300.0E + 03 \end{Bmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $U_5 = -0.54621''$ y $U_6 = 0.0003104 \text{ rad}$. Una vez obtenido el desplazamiento del nodo de la interfase, los desplazamientos de los nodos 2 y 4 se obtienen de la ec.(3) y la ec.(7), respectivamente.

La solución de la estructura completa mediante el programa MEF01.for se presenta a continuación. Nótese que los los valores de las componentes del desplazamiento del nodo 3 coinciden con los obtenidos a través del procedimiento de sub-estructuración.

PROBLEMA: VIGA DE EJE RECTO PARA EJEMPLO DE SUB-ESTRUCTURAS

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS.....(NN) = 5
 NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 4
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO(NGLN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE)..... = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN)..... = 1
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP) = 2
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS(NNC)..... = 3
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS(NEC)..... = 0
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7) = 3
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT) = 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X
1	0.00000E+00
2	0.12000E+03
3	0.24000E+03
4	0.36000E+03
5	0.48000E+03

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES			TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1	
2	2	3	1	
3	3	4	1	
4	4	5	1	

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.00000E+00

5 0.00000E+00 0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIZ)..... = 0.10000E+04

CARGAS EN LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
2	-0.20000E+05	0.00000E+00
3	-0.10000E+05	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.12000E+07

VECTOR DE CARGAS NODALES

=====

0.00000E+00
0.00000E+00
-0.20000E+05
0.00000E+00
-0.10000E+05
0.00000E+00
0.00000E+00
0.12000E+07
0.00000E+00
0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	-0.33207E+00	-0.34914E-02
3	-0.54621E+00	0.31034E-03
4	-0.26379E+00	0.39569E-02
5	0.00000E+00	0.00000E+00

ELEMENTO: VIGA DE EJE RECTO

=====

ELEM	NODO	FY	MZ
1	1	0.2469E+05	0.2325E+07
	2	-0.2469E+05	0.6375E+06
2	2	0.4687E+04	-0.6375E+06
	3	-0.4687E+04	0.1200E+07
3	3	-0.5312E+04	-0.1200E+07
	4	0.5312E+04	0.5625E+06
4	4	-0.5312E+04	0.6375E+06
	5	0.5312E+04	-0.1275E+07

REACCIONES EN LOS APOYOS

```

=====
NODO  REAC 1      REAC 2
  1    0.24688E+05  0.23250E+07
  5    0.53125E+04 -0.12750E+07
    
```

Ejemplo 2

Supóngase que se desea determinar los desplazamientos del nodo 3 del pórtico plano mostrado en la Fig.E2.1. Para todos los elementos, $E = 29 \times 10^6$ psi y $I_z = 100$ pulg⁴ y $A = 10$ pulg². Con la finalidad de evitar la reordenación de las ecuaciones globales de la estructura, como lo indica la ec.(6.8.1), se ha seleccionado la numeración de los nodos del pórtico tal como se muestra en dicha figura.

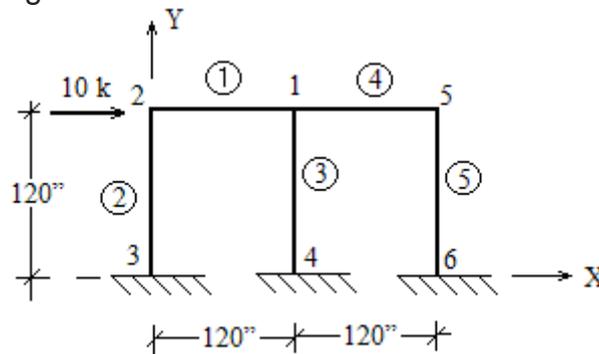


Fig.E2.1. Pórtico plano original

El pórtico original se ha dividido en las dos sub-estructuras mostradas en la Fig.E.2.2.

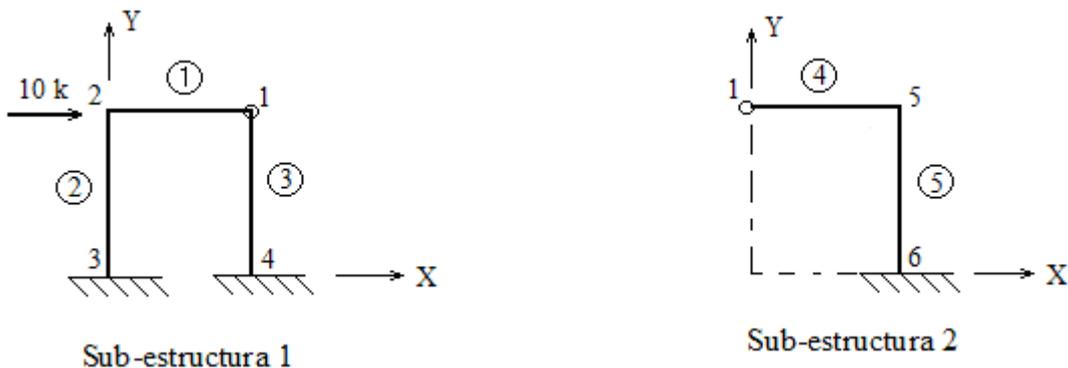


Fig.E2.2. Sub-estructuras del pórtico original

Una vez eliminadas las ecuaciones asociadas a los desplazamientos de los nodos restringidos en la sub-estructura 1, la matriz global de rigidez de ésta es:

$$\begin{bmatrix} 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 & -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.242E+08 & -0.121E+06 & 0.0 & -0.201E+04 & -0.121E+06 \\ 0.121E+06 & -0.121E+06 & 0.193E+08 & 0.0 & 0.121E+06 & 0.483E+07 \\ -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 & 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 \\ 0.0 & -0.201E+04 & 0.121E+06 & 0.0 & 0.242E+08 & 0.121E+06 \\ 0.0 & -0.121E+06 & 0.483E+07 & 0.121E+06 & 0.121E+06 & 0.193E+08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \\ 10.0E+03 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

donde U_1 , U_2 y U_3 corresponden a las componentes del desplazamiento del nodo 1 y U_4 , U_5 y U_6 , corresponden a las componentes del desplazamiento del nodo 2. Las sub matrices correspondientes a la matriz global de la sub-estructura 1, dada por la ec.(1), son:

$$\begin{aligned}
 [K_{ii}] &= \begin{bmatrix} 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 \\ 0.0 & 0.242E+08 & -0.121E+06 \\ 0.121E+06 & -0.121E+06 & 0.193E+08 \end{bmatrix} \\
 [K_{ie}] &= \begin{bmatrix} -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.201E+04 & -0.121E+06 \\ 0.0 & 0.121E+06 & 0.483E+07 \end{bmatrix} \\
 [K_{ei}] &= \begin{bmatrix} -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.201E+04 & 0.121E+06 \\ 0.0 & -0.121E+06 & 0.483E+07 \end{bmatrix} \\
 [K_{ee}] &= \begin{bmatrix} 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 \\ 0.0 & 0.242E+08 & 0.121E+06 \\ 0.121E+06 & 0.121E+06 & 0.193E+08 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (2a)$$

y los correspondientes vectores, son:

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad \{F_e\} = \begin{Bmatrix} 10.0E+03 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix} \quad \{U_i\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2b)$$

Una vez sustituidas estas matrices y vectores en la ec.(6.8.5), se obtiene.

$$\begin{bmatrix} 0.32447E+04 & 0.755127E+03 & 0.906291E+05 \\ 0.755127E+03 & 0.241679E+08 & -0.906191E+05 \\ 0.906291E+05 & -0.906191E+05 & 0.181246E+08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.999948E+04 \\ -0.312466E+00 \\ 0.124981E+02 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Para la sub-estructura 2, después de eliminar las ecuaciones correspondientes a las direcciones de los desplazamientos del nodo 3, el sistema global de la sub-estructura queda reducida a:

$$\begin{bmatrix}
 0.242E+08 & 0.0 & 0.0 & -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 \\
 0.0 & 0.201E+04 & 0.121E+06 & 0.0 & -0.201E+04 & 0.121E+06 \\
 0.0 & 0.121E+06 & 0.967E+07 & 0.0 & -0.121E+06 & 0.483E+07 \\
 -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 & 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 \\
 0.0 & -0.201E+04 & -0.121E+06 & 0.0 & 0.247E+08 & -0.121E+06 \\
 0.0 & 0.121E+06 & 0.483E+07 & 0.121E+06 & -0.121E+06 & 0.193E+08
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_{13} \\
 U_{14} \\
 U_{15}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0
 \end{Bmatrix}
 \quad (4)$$

Donde ahora, U_1 , U_2 y U_3 corresponden a las componentes del desplazamiento del nodo 1 y U_{13} , U_{14} y U_{15} , corresponden a las componentes del desplazamiento del nodo 5. Las sub matrices correspondientes a la matriz global de la sub-estructura 2, dada por la ec.(4), son:

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 \\ 0.0 & 0.242E+08 & -0.121E+06 \\ 0.121E+06 & -0.121E+06 & 0.193E+08 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ie}] = \begin{bmatrix} -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.201E+04 & -0.121E+06 \\ 0.0 & 0.121E+06 & 0.483E+07 \end{bmatrix}$$

(5a)

$$[K_{ei}] = \begin{bmatrix} -0.242E+08 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -0.201E+04 & 0.121E+06 \\ 0.0 & -0.121E+06 & 0.483E+07 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ee}] = \begin{bmatrix} 0.242E+08 & 0.0 & 0.121E+06 \\ 0.0 & 0.242E+08 & 0.121E+06 \\ 0.121E+06 & 0.121E+06 & 0.193E+08 \end{bmatrix}$$

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}
 \quad
 \{F_e\} = \begin{Bmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{Bmatrix}
 \quad
 \{U_i\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}
 \quad (5b)$$

Una vez sustituidas estas matrices y vectores en la ec.(6.8.5), se obtiene.

$$\begin{bmatrix}
 0.124471E+04 & -0.755127E+03 & -0.302039E+05 \\
 -0.755127E+03 & 0.125860E+04 & 0.906191E+05 \\
 -0.302039E+05 & 0.906191E+05 & 0.845796E+07
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0.0 \\
 0.0 \\
 0.0
 \end{Bmatrix}
 \quad (6)$$

Finalmente, sumando la ec.(3) con la ec.(9) se obtiene el sistema de ecuaciones que permite determinar las componentes del desplazamiento en el nodo de la interfase de las dos sub-estructuras; es decir, en el nodo 1.

$$\begin{bmatrix} 0.44894199E+04 & 0.0 & 0.60425103E+00 \\ 0.0024169150E+08 & 0.0 & 0.0 \\ 0.60425200E+04 & 0.0 & 0.26582560E+08 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.99994805E+04 \\ -0.31246600E+00 \\ 0.12498100E+02 \end{Bmatrix}$$

La solución de este sistema de ecuaciones es: $U_1 = 0.22273436E+01$ ", $U_2 = -.12928299E-07$ " y $U_3 = -.50583051E-03$ rad. Una vez obtenido el desplazamiento del nodo de la interface, los desplazamientos de los nodos 2 y 5 se obtienen de la ec.(1) y la ec.(4), respectivamente.

La solución de la estructura completa mediante el programa MEF01.for se presenta a continuación. Nótese que los valores de las componentes del desplazamiento del nodo 1 coinciden con los obtenidos a través del procedimiento de sub-estructuración.

PROBLEMA: PÓRTICO PLANO PARA EJEMPLO DE SUB-ESTRUCTURAS

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS..... (NN) = 6
 NÚMERO DE ELEMENTOS..... (NE)..... = 5
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO (NGLN)..... = 3
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO (NNPE)..... = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO (NCOPN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS..... (NNDP) = 3
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS (NNC)..... = 1
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS (NEC)..... = 0
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7)..... = 4
 NÚMERO DE MATERIALES (NMAT) = 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.12000E+03	0.12000E+03
2	0.00000E+00	0.12000E+03
3	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.12000E+03	0.00000E+00
5	0.24000E+03	0.12000E+03
6	0.24000E+03	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```
=====
```

ELEMENTO	NODOS CONCURRENTES			TIPO DE MATERIAL
1	1	2	1	
2	2	3	1	
3	1	4	1	
4	1	5	1	
5	5	6	1	

CONDICIONES DE CONTORNO

```
=====
```

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```
=====
```

MODULO DE ELASTICIDAD..... (E) = 0.29000E+08
 AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL (AX) = 0.10000E+03
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION..... (CIZ) = 0.10000E+02

CARGAS EN LOS NODOS

```
=====
```

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
2	0.10000E+05	0.00000E+00	0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```
=====
```

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.22759E+01	-0.12928E-07	-0.51728E-02
2	0.22761E+01	0.90523E-04	-0.12933E-01
3	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
4	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00
5	0.22757E+01	-0.90510E-04	-0.12931E-01
6	0.00000E+00	0.00000E+00	0.00000E+00

ELEMENTO: PÓRTICO PLANO

```
=====
```

ELEM	NODO	FX	FY	MZ
1	1	0.6979E+04	-0.2188E+04	-0.1125E+06
	2	-0.6979E+04	0.2188E+04	-0.1500E+06
2	2	-0.2188E+04	0.3021E+04	0.1500E+06
	3	0.2188E+04	-0.3021E+04	0.2125E+06
3	1	0.3124E+00	0.3958E+04	0.2250E+06
	4	-0.3124E+00	-0.3958E+04	0.2500E+06
4	1	0.3021E+04	-0.2187E+04	-0.1125E+06
	5	-0.3021E+04	0.2187E+04	-0.1500E+06

5	5	0.2187E+04	0.3021E+04	0.1500E+06
	6	-0.2187E+04	-0.3021E+04	0.2125E+06

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
3	-0.30211E+04	-0.21876E+04	0.21252E+06
4	-0.39583E+04	0.31243E+00	0.25000E+06
6	-0.30206E+04	0.21873E+04	0.21249E+06

6.9.- Discontinuidades en los elementos.

En algunos casos se presentan, en el análisis estructural, elementos con discontinuidades parciales. En la Fig.6.11 se muestran las discontinuidades que pueden existir en los elementos de estructuras reticulares.

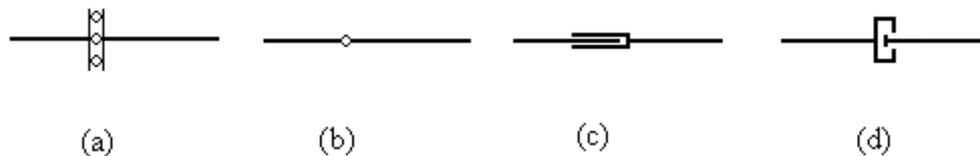


Fig.6.11. Discontinuidades parciales en los elementos

Los símbolos en esta figura indican, en forma secuencial, la imposibilidad de transmitir fuerza cortante, momento flector, fuerza normal y momento torsor. Estas restricciones de las acciones imponen, como resultado, discontinuidades en los desplazamientos de traslación o rotación. Es posible, también, que exista una combinación de estas discontinuidades, en cuyo caso la discontinuidad completa toma la forma de un extremo libre. La naturaleza general de una estructura reticular determina los tipos de discontinuidades que son importantes considerar. Por ejemplo, en una viga de eje recto, sólo son de importancia las discontinuidades de asociadas a la fuerza cortante y el momento flector.

Independientemente del tipo de acción que se desee liberar, la matriz local de rigidez puede ser determinada a partir de la respectiva matriz local de rigidez original del elemento; es decir, aquella que se deduce sin considerar ningún tipo de discontinuidad.

6.9.1- Viga de eje recto con una rótula nodal

En esta sección se considerará, en detalle, la deducción de la matriz local de rigidez de una viga de eje recto con una rótula (o articulación) interna, en algún punto de la misma. En general, una rótula interna, en un elemento, causa una discontinuidad en la pendiente de la curva de deflexión en el punto donde se la ha colocado y, adicionalmente, el momento flector en ese punto es igual a cero.

Esta condición especial puede deducirse, como ya se estableció, a partir de la respectiva matriz local de rigidez (5.45), eliminando las ecuaciones

asociadas a la fuerza y/o el momento que es igual a cero. Con este procedimiento se obtiene una matriz local de rigidez que represente las condiciones especiales descritas.

En la Fig.6.12 se muestra el caso que aparece más frecuentemente en una viga de eje recto; es decir, una viga con una rótula en el extremo izquierdo (o derecho), de la misma. En la Fig.6.12a, la rótula está situada en el extremo derecho, lo cual significa que el momento flector en el nodo 2 es nulo; es decir, $m_2 = 0$.

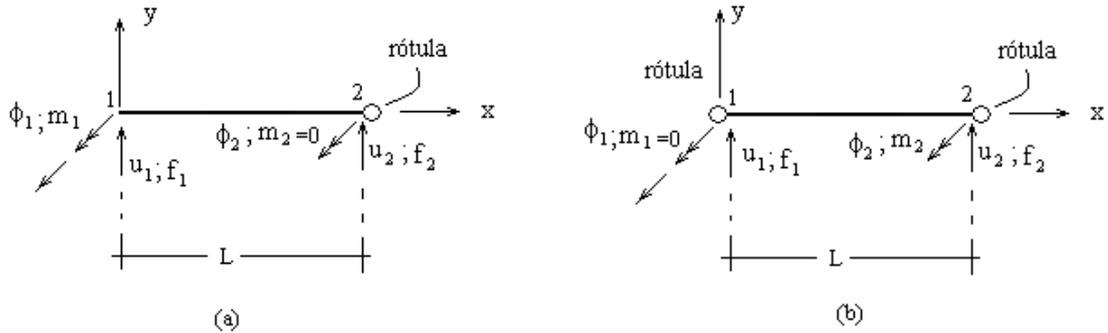


Fig.6.12. Elemento de viga; (a) rótula en el extremo derecho; (b) rótula en el extremo izquierdo

Para eliminar el grado de libertad correspondiente a la rotación en la rótula (ϕ_2), correspondiente a $m_2 = 0$, la matriz local de rigidez del elemento de viga de eje recto se sub-divide tal como se indica en la ec.(6.12):

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Usando ahora el procedimiento de condensación estática visto en la sección 6.7, se puede condensar el grado de libertad ϕ_2 asociado a $m_2 = 0$; es decir:

$$[k]_{\text{CONDENSADA}} = [k_{pp}] - [k_{ps}] [k_{ss}]^{-1} [k_{sp}] \quad (6.13)$$

donde:

$$\left[\mathbf{k}_{pp} \right] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & -\frac{12EI_z}{L^3} \\ \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{12EI_z}{L^3} \end{bmatrix} ; \quad \left[\mathbf{k}_{ps} \right] = \begin{Bmatrix} \frac{6EI_z}{L^2} \\ \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{6EI_z}{L^2} \end{Bmatrix} \quad (6.14)$$

$$\left[\mathbf{k}_{ss} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} L \\ 4EI_z \end{bmatrix} ; \quad \left[\mathbf{k}_{sp} \right] = \begin{bmatrix} \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} \end{bmatrix}$$

Sustituyendo las matrices de la ecuación anterior en la ec.(6.13), se obtiene:

$$\left[\mathbf{k} \right]_{\text{CONDENSADA}} = \begin{bmatrix} \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & -\frac{3EI_z}{L^3} \\ \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

y, las ecuaciones (relaciones fuerza-desplazamiento) para el elemento de la Fig.6.11a, es:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & -\frac{3EI_z}{L^3} \\ \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

Una forma más general de escribir esta ecuación es expandirla de modo de mantener el orden de la matriz local de rigidez original (4x4), manteniendo aún el hecho que $m_2=0$, lo cual es posible añadiendo una cuarta fila y una cuarta columna con coeficientes iguales, todos, a cero.; es decir:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 \\ -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (6.17)$$

Para el elemento de viga mostrado en la Fig.6.11.b; es decir, ($m_1=0$), y siguiendo el mismo procedimiento descrito, el lector podrá verificar que las ecuaciones fuerza-desplazamiento son:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EI_z}{L^3} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ \phi_1 \\ u_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

Ejemplo 1

La viga de eje recto, uniforme, mostrada en la Fig.E1.1 tiene una rótula en el nodo 2. Supóngase que se desea determinar los desplazamientos que se generan en dicho nodo. Sea $E = 30.0E + 06 \text{ psi}$, $I_z = 100 \text{ pu Ig}^4$, $a = 8.0''$, $b = 2.0''$ y $P = 10 \text{ k}$.

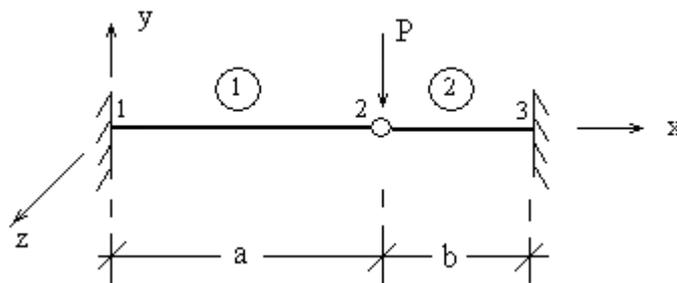


Fig.E.1.1 Viga uniforme con una rótula

Se supondrá que la rótula es parte del elemento 1; es decir está situada en el extremo derecho de este elemento. Por lo tanto, la matriz local de rigidez viene dada por la ec.(6.17):

$$[k]^{(1)} = \frac{3EI_z}{a^3} \begin{bmatrix} 1 & a & -1 & 0 \\ a & a^2 & -a & 0 \\ -1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

y la matriz local de rigidez del elemento 2 se obtiene mediante la ec.(6.12):

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{b^3} & \frac{6EI}{b^2} & -\frac{12EI}{b^3} & \frac{6EI}{b^2} \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} \\ -\frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ensamblando las ecs.(1) y (2) y aplicando las condiciones de contorno; es decir, en el nodo 1 $u_1 = \phi_1 = 0$ y en el nodo 3 $u_3 = \phi_3 = 0$, el conjunto de ecuaciones queda reducido a:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EI_z}{a^3} + \frac{12EI_z}{b^3} & \frac{6EI_z}{b^2} \\ \frac{6EI_z}{b^2} & \frac{4EI_z}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$

La solución de este sistema de ecuaciones es:

$$u_2 = \frac{-a^3 b^3 P}{3(a^3 + b^3)EI_z} ;$$

$$\phi_2 = \frac{a^3 b^2 P}{2(a^3 + b^3)EI_z} \quad (4)$$

Sustituyendo los datos del problema en estas ecuaciones se obtiene:

$$u_2 = \frac{-(8)^3 (2)^3 (10.0E + 03)}{3(8^3 + 2^3)(30.0E + 06)(100)} = -0.8752136E - 05 \text{ pu lg} \quad (5)$$

$$\phi_2 = \frac{(8)^3 (2)^2 (10.0E + 03)}{2(8^3 + 2^3)(30.0E + 06)(100)} = 0.656410E - 05 \text{ rad}$$

Una vez obtenidos los desplazamientos del nodo 2, las acciones de extremo de miembro del elemento 1 se determinan mediante la ec.(6.16), donde se ha sustituido L por a:

$$\begin{bmatrix} \frac{3EI_z}{a^3} & \frac{3EI_z}{a^2} & -\frac{3EI_z}{a^3} \\ \frac{3EI_z}{a^2} & \frac{3EI_z}{a} & -\frac{3EI_z}{a^2} \\ -\frac{3EI_z}{a^3} & -\frac{3EI_z}{a^2} & \frac{3EI_z}{a^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -a^3 b^3 P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Una vez resuelto este sistema se obtiene:

$$f_1 = \frac{b^3 P}{a^3 + b^3} \quad ; \quad m_1 = \frac{a b^3 P}{a^3 + b^3} \quad ; \quad f_2 = -\frac{b^3 P}{a^3 + b^3} \quad (7)$$

que, para este caso, resulta:

$$f_1 = \frac{2^3(10.0E+06)}{8^3 + 2^3} = 153.846 \text{ lbs}$$

$$m_1 = \frac{(8)2^3(10.0E+06)}{8^3 + 2^3} = 1230.77 \text{ lbs - pulg}$$

$$f_2 = -\frac{2^3(10.0E+06)}{8^3 + 2^3} = -153.846 \text{ lbs}$$

Utilizando ahora la ec.(2) y las ec.(4) se obtienen las acciones de extremo de miembro del elemento 2:

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{b^3} & \frac{6EI}{b^2} & -\frac{12EI}{b^3} & \frac{6EI}{b^2} \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} \\ -\frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{12EI}{b^3} & -\frac{6EI}{b^2} \\ \frac{6EI}{b^2} & \frac{2EI}{b} & -\frac{6EI}{b^2} & \frac{4EI}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{-a^3 b^3 P}{3(a^3 + b^3)EI_Z} \\ \frac{a^3 b^2 P}{2(a^3 + b^3)EI_Z} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2 \\ m_2 \\ f_3 \\ m_3 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

cuya solución es:

$$f_2 = -\frac{a^3 P}{a^3 + b^3} \quad ; \quad m_2 = 0 \quad ; \quad f_3 = \frac{a^3 P}{a^3 + b^3} \quad ; \quad m_3 = -\frac{a^3 b P}{a^3 + b^3} \quad (9)$$

$$f_2 = -\frac{8^3(10000)}{8^3 + 2^3} = -9846.154 \text{ lbs} \quad ; \quad m_2 = 0$$

$$f_3 = \frac{8^3(10000)}{8^3 + 2^3} = 9846.154 \text{ lbs} \quad ;$$

$$m_3 = -\frac{8^3(2)(10000)}{8^3 + 2^3} = -19692.31 \text{ lbs - pulg}$$

Los resultados obtenidos mediante el programa MEF01.for son:

PROBLEMA: VIGA CON DISCONTINUIDAD DE MOMENTO FLECTOR
DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

=====

NÚMERO DE NODOS.....(NN)..... = 3
 NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 2
 NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO(NGLN)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO(NNPE)..... = 2
 NÚMERO DE COORDENADAS/NODO(NCOPN).... = 1
 NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 2
 NÚMERO DE NODOS CARGADOS(NNC)..... = 1
 NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS(NEC)..... = 0
 ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7)..... = 3
 NÚMERO DE MATERIALES(NMAT)..... = 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

=====

NODO	COOR. X
1	0.00000E+00
2	0.80000E+01
3	0.10000E+02

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

=====

ELEMENTO	NODOS	CONCURRENTES	TIPO DE MATERIAL	TIPO DE DISCONT	TIPO DE
1	1 2	1 3	(lado derecho)		
2	2 3	1 1	(sin discontinuidad)		

CONDICIONES DE CONTORNO

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
1	0.00000E+00	0.00000E+00
3	0.00000E+00	0.00000E+00

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

=====

MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.30000E+08
 MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIZ)..... = 0.10000E+03

CARGAS EN LOS NODOS

=====

NODO	DIR.1	DIR.2
2	-0.10000E+05	0.00000E+00

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```

=====
NODO  DIR.1      DIR.2
  1    0.00000E+00  0.00000E+00
  2    -0.87521E-05  0.65641E-05
  3    0.00000E+00  0.00000E+00
    
```

ELEMENTO: VIGA DE EJE RECTO

```

=====
ELEM  NODO    FY          MZ
  1    1    0.1538E+03  0.1231E+04
      2   -0.1538E+03  0.0000E+00
  2    2   -0.9846E+04  0.0000E+00
      3    0.9846E+04 -0.1969E+05
    
```

REACCIONES EN LOS APOYOS

```

=====
NODO  REAC 1      REAC 2
  1    0.15385E+03  0.12308E+04
  3    0.98462E+04 -0.19692E+05
    
```

6.9.2- Elemento de pórtico plano con una rótula nodal

En un elemento de pórtico plano, los efectos de la fuerza axial y del momento flector están desacoplados. Este hecho hace que la matriz local de rigidez de un elemento de este tipo, que contenga una rótula nodal en su extremo izquierdo, pueda obtenerse por simple modificación de la matriz local de rigidez dada por la ec.(6.17). Para ello basta con añadir, a esta matriz, las dos filas y las dos columnas correspondientes a los efectos de la carga axial.; es decir:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

donde:

u_1, u_2 y u_3 representan los desplazamientos locales del nodo izquierdo del elemento en las direcciones axial, transversal y rotación alrededor del eje z,

respectivamente. De igual modo, u_4, u_5 y u_6 , representan los desplazamientos, en las mismas direcciones, en el nodo derecho del elemento.

Para un elemento de pórtico plano con una rótula nodal en el extremo derecho, la matriz local de rigidez toma la forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & \frac{3EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI_z}{L^2} & \frac{3EI_z}{L} & 0 & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA_x}{L} & 0 & 0 & \frac{EA_x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI_z}{L^3} & -\frac{3EI_z}{L^2} & 0 & \frac{3EI_z}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

Ejemplo 2

Considérese el pórtico plano mostrado en la Fig.E.2.1. Para todos los elementos $E=29.0E+06$ psi, $A_x=10$ pu lg² y $I_z=100$ pu lg⁴.

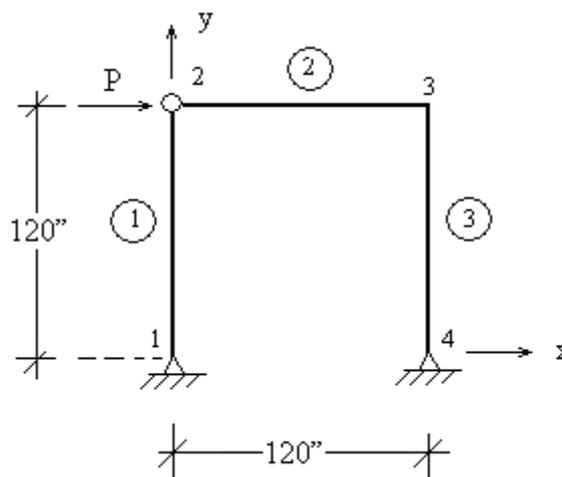


Fig.E.2.1 Pórtico plano con una rótula en el elemento 2

La solución de este ejemplo se obtuvo mediante el programa MEF01.for. Los resultados se muestran a continuación.

PROBLEMA: PÓRTICO CON DISCONTINUIDAD DE MOMENTO FLECTOR (ELEMENTO 2)

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

```

=====
NÚMERO DE NODOS.....(NN)..... = 4
NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)..... = 3
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO ..(NGLN)..... = 3
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO .....(NNPE)..... = 2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO .....(NCOPN)..... = 2
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)..... = 2
NÚMERO DE NODOS CARGADOS .....(NNC)..... = 1
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS .....(NEC)..... = 0
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7)..... = 4
NÚMERO DE MATERIALES .....(NMAT)..... = 1
    
```

COORDENADAS DE LOS NODOS

```

=====
NODO      COOR. X      COOR. Y
1         0.00000E+00  0.00000E+00
2         0.00000E+00  0.12000E+03
3         0.12000E+03  0.12000E+03
4         0.12000E+03  0.00000E+00
    
```

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEMENTO  NODOS CONCURRENTES  TIPO DE  TIPO DE
              MATERIAL  DISCONT
1     1     2         1     1  (sin discontinuidad)
2     2     3         1     2  (lado izquierdo)
3     3     4         1     1  (sin discontinuidad)
    
```

CONDICIONES DE CONTORNO

```

=====
NODO      DIR.1      DIR.2      DIR.3
1         0.00000E+00  0.00000E+00  0.20000E+03
4         0.00000E+00  0.00000E+00  0.20000E+03
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL .....(AX)..... = 0.10000E+02
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION.....(CIZ)..... = 0.10000E+03
    
```

CARGAS EN LOS NODOS

```

=====
NODO      DIR.1      DIR.2      DIR.3
2         0.10000E+04  0.00000E+00  0.00000E+00
    
```

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```
=====
```

NODO	DIR.1	DIR.2	DIR.3
1	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.33207E-02
2	0.39848E+00	0.41552E-03	-0.33207E-02
3	0.39807E+00	0.41552E-03	-0.16621E-02
4	0.00000E+00	0.00000E+00	-0.41448E-02

ELEMENTO: PÓRTICO PLANO

```
=====
```

ELEM	NODO	FX	FY	MZ
1	1	-0.1004E+04	0.5534E-02	0.6641E+00
	2	0.1004E+04	-0.5534E-02	-0.5821E-10
2	2	0.1000E+04	-0.1004E+04	0.0000E+00
	3	-0.1000E+04	-0.1004E+04	-0.1200E+06
3	3	-0.1004E+04	0.1000E+04	0.1200E+06
	4	0.1004E+04	-0.1000E+04	0.8290E+00

REACCIONES EN LOS APOYOS

```
=====
```

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
1	-0.55344E-02	-0.10042E+04	0.66413E+00
4	-0.99999E+03	-0.10042E+04	0.82896E+00

Esta solución se obtuvo colocando la rótula en el nodo izquierdo del elemento 2. Si se coloca la rótula en el nodo derecho del elemento 1 se obtienen los siguientes resultados:

PROBLEMA: PÓRTICO CON DISCONTINUIDAD DE MOMENTO FLECTOR ELEMENTO 2

DATOS GENERALES DE LA ESTRUCTURA

```
=====
```

NÚMERO DE NODOS.....(NN)	= 4	
NÚMERO DE ELEMENTOS.....(NE)	= 3	
NÚMERO DE GRADOS DE LIBERTAD/NODO ..(NGLN)	= 3	
NÚMERO DE NODOS/ELEMENTO	(NNPE)	= 2
NÚMERO DE COORDENADAS/NODO	(NCOPN)	= 2
NÚMERO DE NODOS PRESCRITOS.....(NNDP)	= 2	
NÚMERO DE NODOS CARGADOS	(NNC)	= 1
NÚMERO DE ELEMENTOS CARGADOS	(NEC).....	= 0
ELEMENTO.....(AXI/A2D/VIG/P2D/PAR/A3D/P3D:1/2/3/4/5/6/7)	= 4	
NÚMERO DE MATERIALES	(NMAT)	= 1

COORDENADAS DE LOS NODOS

```
=====
```

NODO	COOR. X	COOR. Y
1	0.00000E+00	0.00000E+00
2	0.00000E+00	0.12000E+03

3	0.12000E+03	0.12000E+03
4	0.12000E+03	0.00000E+00

INCIDENCIAS DE LOS ELEMENTOS

```

=====
ELEMENTO NODOS CONCURRENTES TIPO DE TIPO DE
          MATERIAL DISCONT
1   1   2   1   3 (lado derecho)
2   2   3   1   1 (sin discontinuidad)
3   3   4   1   1 (sin discontinuidad)
    
```

CONDICIONES DE CONTORNO

```

=====
NODO   DIR.1      DIR.2      DIR.3
1     0.00000E+00 0.00000E+00 0.20000E+03
4     0.00000E+00 0.00000E+00 0.20000E+03
    
```

PROPIEDADES DEL MATERIAL NUMERO = 1

```

=====
MODULO DE ELASTICIDAD.....(E)..... = 0.29000E+08
AREA DE LA SECCION TRANSVERSAL .....(AX) ..... = 0.10000E+02
MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCION .....(CIZ) ..... = 0.10000E+03
    
```

CARGAS EN LOS NODOS

```

=====
NODO   DIR.1      DIR.2      DIR.3
2     0.10000E+04 0.00000E+00 0.00000E+00
    
```

DESPLAZAMIENTOS DE LOS NODOS

```

=====
NODO   DIR.1      DIR.2      DIR.3
1     0.00000E+00 0.00000E+00 0.33206E-02
2     0.39848E+00 0.41379E-03 0.82068E-03
3     0.39806E+00 -0.41379E-03 -0.16620E-02
4     0.00000E+00 0.00000E+00 -0.41448E-02
    
```

ELEMENTO: PÓRTICO PLANO

```

=====
ELEM NODO   FX      FY      MZ
1     1     -0.1000E+04 0.4012E+04 -0.6641E+00
      2     0.1000E+04 -0.5534E-02 0.0000E+00
2     2     0.1000E+04 -0.1000E+04 0.1455E-10
      3     -0.1000E+04 0.1000E+04 -0.1200E+06
3     3     0.1000E+04 0.1000E+04 0.1200E+06
      4     -0.1000E+04 -0.1000E+04 0.8290E+00
    
```

REACCIONES EN LOS APOYOS

=====

NODO	REAC 1	REAC 2	REAC 3
1	-0.40124E+04	-0.99999E+03	-0.66413E+00
4	-0.99999E+03	0.99999E+03	0.82895E+00

Observación:

El lector deberá notar que la rotación del nodo 2 no es la misma en ambos análisis, lo cual se debe a la presencia de la rótula en ese nodo. En el primer análisis realizado, la rótula se colocó en el extremo izquierdo del elemento 2 y, en el segundo análisis, se la colocó en el extremo izquierdo del elemento 1. Es decir, hay dos rotaciones diferentes en ese nodo y solamente una está presente en los resultados de un análisis dado. Sin embargo, las acciones de extremo de miembro son las mismas en ambos análisis, como debe ser.

Si el nodo 2 fuera rígido, por supuesto que la compatibilidad rotacional en este nodo se mantiene ya que las rotaciones en los extremos de ambos elementos (la columna: elemento 1 y la viga: elemento 2), son las mismas.

6.10.- Elementos no uniformes

Un elemento cuyo eje longitudinal sea recto, que sea uniforme (área y momento de inercia constante) y homogéneo (módulo de elasticidad constante) se clasifica como un “elemento prismático”, de lo contrario como “elemento no prismático”. Frecuentemente, en algunas estructuras aparecen elementos de este tipo; tres ejemplos se muestra en la Fig.6.8.1.

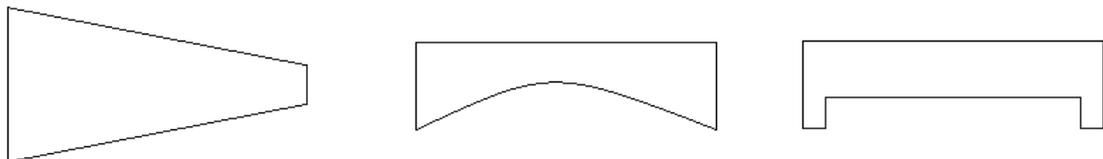


Fig.6.8.1 Elementos no prismáticos

Podría ser posible interpretar un elemento no prismático como elementos prismáticos pequeños unidos en serie. Sin embargo, es bastante improbable que tal interpretación represente el caso real en forma exacta y, si se desea exactitud en los cálculos, se hace necesario deducir, en cada caso, la respectiva matriz de rigidez de cada elemento no prismático que conforma una estructura dada. En esta sección se deducirá la matriz local de rigidez de algunos elementos no prismáticos.

6.10.1.- Barra de sección transversal variable linealmente

Como un ejemplo de un elemento no prismático, considérese la barra mostrada en la Fig.6.8.2. Se desea determinar la matriz de rigidez de este elemento.

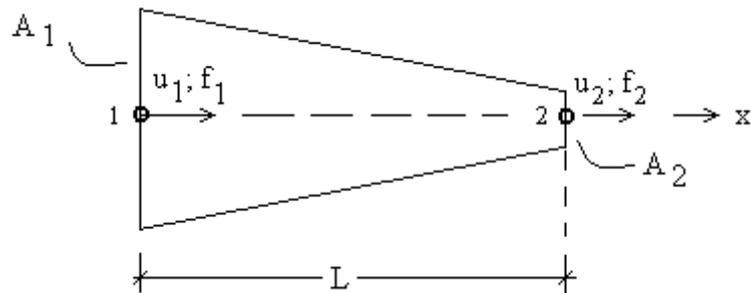


Fig.6.8.2 Elemento de sección transversal variable linealmente

Como en el caso de una barra uniforme, este elemento tiene dos grados de libertad; dos nodos y un grado de libertad por nodo. Luego la matriz de rigidez de este elemento será de 2x2. El área de la sección transversal en cualquier posición x, vendrá dada por:

$$A(x) = A_1 + \left(\frac{A_2 - A_1}{L} \right) x \quad (6.8.1)$$

Restringiendo el desplazamiento del nodo 1 y aplicando una fuerza axial P en el nodo 2, se podrá determinar el desplazamiento de este nodo. La deformación normal unitaria en cualquier punto de la barra viene dada por:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{A(x)E} \quad (6.8.2)$$

Donde la fuerza P y el módulo de elasticidad E son constantes, y el área de la sección transversal A(x), está dada por la ec.(6.8.2). Luego:

$$u_2 = u(L) = \int_0^L \varepsilon dx = \frac{P}{E} \int_0^L \frac{dx}{A_1 + \left(\frac{A_2 - A_1}{L} \right) x} \quad (6.8.3)$$

Después de integrar la ecuación anterior se obtiene:

$$u_2 = \frac{P}{E} \left(\frac{L}{A_2 - A_1} \right) \text{Ln} \left(\frac{A_2}{A_1} \right) \quad (6.8.4)$$

Haciendo ahora $u_2 = 1$, se obtiene el coeficiente de rigidez k_{22} , el cual viene dado por:

$$k_{22} = \frac{E (A_2 - A_1)}{L \operatorname{Ln} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)} \quad (6.8.5)$$

La fuerza en el nodo 1 correspondiente al desplazamiento $u_2=1$, es $k_{12} = -k_{22}$. Restringiendo ahora el desplazamiento del nodo 2 y aplicando una fuerza P en el nodo 1 se determinarán los demás coeficientes de rigidez. El lector podrá comprobar que $k_{11} = k_{22}$ y $k_{21} = k_{12}$. Luego, el sistema de ecuaciones asociado al sistema local (y global) de referencia de este elemento es:

$$\frac{E (A_2 - A_1)}{L \operatorname{Ln} \left(\frac{A_2}{A_1} \right)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (6.8.6)$$

Si el área de la sección transversal en vez de variar linealmente, tiene otra forma de variación más complicada, probablemente sea necesario utilizar integración numérica para determinar los coeficientes de la matriz local de rigidez del elemento.

6.10.2.- Barra escalonada

Considérese la barra mostrada en la Fig.6.8.3. Esta es, realmente, la forma más simple de un elemento no prismático. Naturalmente, este elemento puede ser tratado como dos elementos por separado, cada uno de los cuales tiene un área de sección transversal constante. Sin embargo, supóngase que se desea determinar la relación fuerza-desplazamiento para este elemento como un todo; es decir, se desea generar la ecuación:

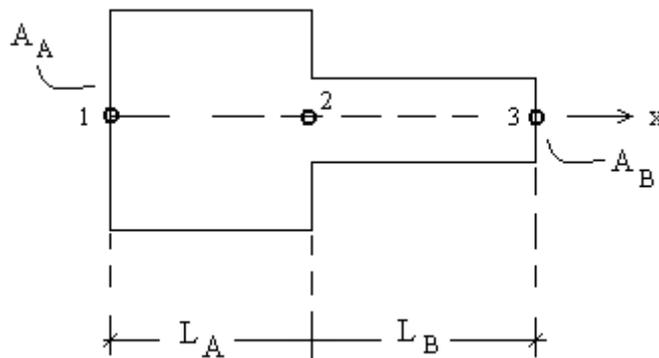


Fig.6.8.3. Barra escalonada

$$[k] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (6.8.7)$$

Por supuesto que se puede utilizar el mismo procedimiento usado en el caso anterior para determinar los coeficientes de rigidez. Sin embargo, utilizando el concepto de condensación estático y avisto, se puede obtener los coeficientes de rigidez k_{ij} mediante un procedimiento alternativo (siempre que los elementos tengan áreas de sección transversal constantes). Sea entonces $EA_A/L_A = k_A$, $EA_B/L_B = k_B$ y u_2 la cantidad “secundaria” de la ecuación matricial de toda la estructura. Entonces:

$$\begin{bmatrix} k_A & 0 & -k_B \\ 0 & k_B & -k_B \\ -k_A & -k_B & k_A + k_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (6.8.8)$$

Nótese que las ecuaciones están reorganizadas de acuerdo con la ec.(6.7.3) de la sección correspondiente a la condensación estática:

$$\begin{bmatrix} [K_{pp}] & [K_{ps}] \\ [K_{sp}] & [K_{ss}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_p\} \\ \{U_s\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_p\} \\ \{F_s\} \end{Bmatrix}$$

y, de la ec.(6.7.8) de esa misma sección:

$$[K]_{\text{CONDENSADO}} = [K_{pp}] - [K_{ps}] [K_{ss}]^{-1} [K_{sp}]$$

es decir;

$$[K]_{\text{CONDENSADO}} = \begin{bmatrix} k_A & 0 \\ 0 & k_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -k_A \\ -k_B \end{bmatrix} \frac{1}{k_A + k_B} \begin{bmatrix} -k_A & -k_B \end{bmatrix} \quad (6.8.9)$$

$$[K]_{\text{CONDENSADO}} = \frac{k_A k_B}{k_A + k_B} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8.10)$$

Luego, el sistema de ecuaciones fuerza-desplazamiento para este elemento, es:

$$\frac{k_A k_B}{k_A + k_B} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (6.8.11)$$

VII- FORMULACIÓN GENERAL DEL MÉTODO DIRECTO

7.1.- Introducción

La deducción de las matrices locales de rigidez de cada uno de los elementos presentados en el capítulo cinco de estas notas involucró, únicamente, el concepto del “coeficiente de rigidez” y la utilización de algunas relaciones básicas de la mecánica de materiales. En este capítulo se presentará, a manera de ejemplo, la deducción de la matriz de rigidez de los elementos uniformes axial y de viga de eje recto, a través de un enfoque matemático. Mediante este procedimiento, la formulación de la matriz local de rigidez de un elemento sea estructural o no, se efectúa a través de los siguientes pasos:

- 1.- Se asume el campo de desplazamientos en el interior del elemento en términos de los desplazamientos nodales definidos en los nodos del mismo.
- 2.- Se introducen las relaciones desplazamiento-deformación, las cuales permiten determinar el estado de deformación del elemento correspondiente al campo de desplazamientos supuesto.
- 3.- Se introduce las propiedades del material del elemento mediante las ecuaciones constitutivas (relaciones esfuerzo-deformación).
- 4.- Se determina el conjunto de fuerzas nodales del elemento.

7.2.- Elemento uniforme axial

Sea el elemento unidimensional sometido a carga axial que se muestra en la Fig.7.1. Igual que antes, se asume que dicho elemento es uniforme y homogéneo. El campo de los desplazamientos de este elemento, está definido por el desplazamiento axial en los nodos 1 y 2. Luego, para describir la variación unidireccional del desplazamiento, la selección lógica para el campo de desplazamientos, es un polinomio lineal en x ; es decir:

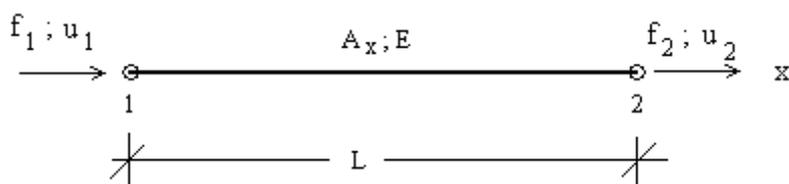


Fig.7.1 Elemento axial uniforme

$$u = a_1 + a_2 x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (7.1)$$

Nota: En el caso que el desplazamiento de un punto tenga tres componentes (p.e., u , v y w), entonces se seleccionará una expansión polinomial independiente para cada dirección; es decir:

$$\begin{aligned} u &= a_1 + a_2x \\ v &= a_3 + a_4y \\ w &= a_5 + a_6z \end{aligned}$$

o, en forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix}$$

Para completar el primer paso se debe evaluar la ec.(7.1) en los nodos del elemento (en $x = 0$ y en $x = L$), lo cual conduce a:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

invirtiendo la matriz de este sistema, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.3)$$

sustituyendo la ec.(7.3) en la ec.(7.1) se obtiene:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N_1 \quad N_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

donde: $N_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)$ y $N_2 = \frac{x}{L}$ son las llamadas “funciones de forma” del campo de desplazamientos. Estas funciones definen el comportamiento del desplazamiento u , debido a valores unitarios de los desplazamientos nodales, tal como se muestra en la Fig.7.2.

El segundo paso involucra la introducción de las ecuaciones cinemáticas (relaciones desplazamiento-deformación). En este caso, la única componente de la deformación distinta de cero es $\varepsilon_x = u_{,x}$ ($u_{,x} = du/dx$). Este paso puede hacerse de dos formas: en la primera, se diferencia la ec.(2.12); es decir:

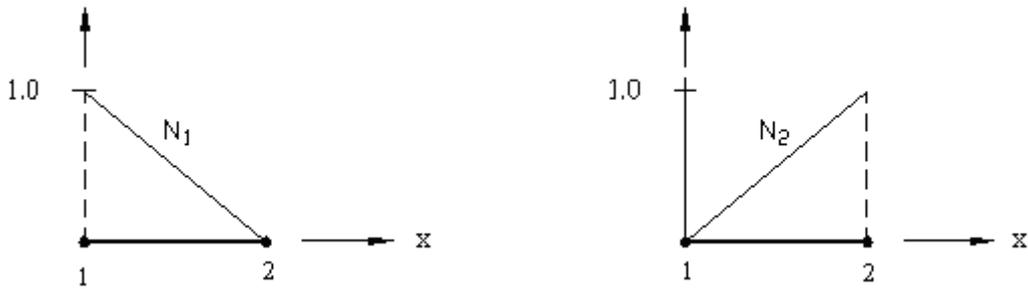


Fig.7.2. Funciones de forma del elemento unidimensional axial

$$u_{,x} = [0 \quad 1] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Luego, introduciendo la ec.(7.3) en la ec.(7.5), se obtiene:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = [0 \quad 1] \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.6)$$

La otra forma de llegar a este resultado es diferenciar directamente la ec.(7.4); es decir:

$$\varepsilon_x = u_{,x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.7)$$

En la etapa número tres se introducen las relaciones constitutivas. En este caso, dichas relaciones se reducen a una única expresión:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (7.8)$$

luego:

$$\sigma_x = E \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.9)$$

Como último paso se debe determinar el conjunto de fuerzas nodales $\{f\} = \{f_1 \quad f_2\}^T$. En este caso, dicho conjunto se obtiene multiplicando el esfuerzo σ_x por el área de la sección transversal A_x del elemento. Luego:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = A_x \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \sigma_x \quad (7.10)$$

Nota: el requisito de equilibrio ($\sum F_x = 0$) exige que f_1 actúe en dirección opuesta al sentido positivo de σ_x .

Introduciendo la ec.(7.9) en la ec.(7.10) se obtiene, finalmente:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = A_x E \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{A_x E}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (7.11)$$

Por supuesto que los sistemas de ecuaciones de ecuaciones (7.11) y (5.7) son idénticos.

7.3.1- Elemento de viga de eje recto

Considérese el elemento de viga de eje recto, uniforme y homogéneo que se muestra en la Fig.7.3. La determinación de la matriz de rigidez de este elemento sigue los mismos pasos del ejemplo anterior, pero ahora se deberán definir, no solo los desplazamientos transversales en los extremos del elemento (u_1 y u_3), si no también, las rotaciones ($u_2 = du/dx|_{x=0}$ y $u_4 = du/dx|_{x=L}$) en los mismos puntos.

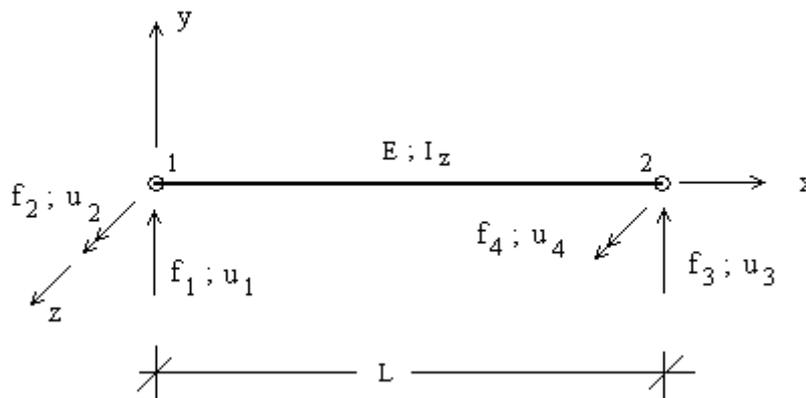


Fig.7.3. Elemento de viga de eje recto

Como en el ejemplo anterior, se comenzará por definir el polinomio que describe el campo de desplazamientos de este elemento. Debido a que existen cuatro desplazamientos nodales, se deberá asumir el polinomio cúbico completo.

$$u = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (7.12)$$

La evaluación de $u = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4\}^T$ en los nodos del elemento, conduce a:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} \quad (7.13)$$

invirtiendo la matriz del sistema anterior, se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^3 & 0 & 0 \\ -3L & -2L^2 & 3L & -L^2 \\ 2 & L & -2 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (7.14)$$

sustituyendo la ec.(7.14) en la ec.(7.12), se llega a:

$$u = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

donde:

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad N_2 = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (7.15a)$$

$$N_3 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad N_4 = (x - L)\left(\frac{x}{L}\right)^2 \quad (7.15b)$$

son las funciones de forma para este elemento, las cuales se muestran en la Fig.7.4. Éstas representan la variación del desplazamiento u a lo largo de la longitud del elemento, debido a valores unitarios de los cuatro desplazamientos nodales u_1 , u_2 , u_3 y u_4 .

FUNCIONES DE FORMA	X=0		X=L		GRAFICO
	N	dN/dX	N	dN/dX	
$N_1 = 1 - 3(X/L)^2 + 2(X/L)^3$	1	0	0	0	
$N_2 = X(1 - X/L)^2$	0	1	0	0	
$N_3 = 3(X/L)^2 - 2(X/L)^3$	0	0	1	0	
$N_4 = (X-L)(X/L)^2$	0	0	0	1	

Fig.7.4. Funciones de forma del elemento de viga de eje recto

En este caso, las relaciones deformación-desplazamiento se infieren directamente de la hipótesis fundamental de flexión: “secciones planas de la viga, normales a su eje longitudinal, permanecen planas después que la viga se somete a flexión”, tal como se muestra en la Fig.7.5.

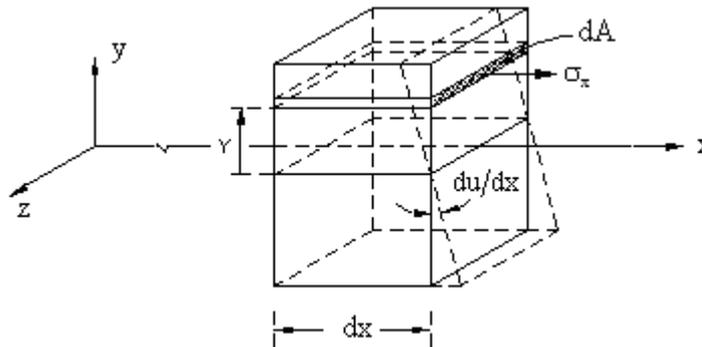


Fig.7.5. Deformaciones debido a la flexión del elemento de viga de eje recto

De la teoría de flexión de vigas se sabe que:

$$\bar{m} = EI \frac{d^2u}{dx^2} \tag{7.16}$$

donde E es el módulo de elasticidad, I_z es el momento de inercia de la sección transversal (puesto que se ha asumido un elemento uniforme y homogéneo este producto es constante), y \bar{m} es el momento interno resistente. Aunque estrictamente hablando una ecuación constitutiva es una relación esfuerzo-deformación, la ec.(7.16) puede verse como una relación de este tipo ya que en definitiva, $\sigma_x = f(\bar{m})$ y $\epsilon_x = f(d^2u/dx^2)$.

Por otro lado, se puede notar que las segundas derivadas de las funciones de forma, [ecs. (7.15)], varían linealmente en el interior del elemento y por lo

tanto la curvatura ($u'' = d^2v/dx^2$), puede definirse únicamente, con los valores de u'' en los puntos nodales 1 y 2 del elemento. Así, de la ec.(7.15) se tiene:

$$\begin{Bmatrix} u_1'' \\ u_2'' \end{Bmatrix} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

sustituyendo esta ecuación en la ec.(2.28), se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} -6L & -4L^2 & 6L & -2L^2 \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

donde $\{\bar{m}_1 \ \bar{m}_2\}^T$, son los momentos internos resistentes en los nodos del elemento. En este caso, el conjunto de fuerzas nodales es $\{f\} = \{f_1 \ m_1 \ f_2 \ m_2\}^T$, donde los términos f_1 y f_2 son las fuerzas en la dirección del eje local y , en los nodos 1 y 2, respectivamente, y m_1 y m_2 representan los momentos con relación al eje local z en los mismos nodos, tal como se muestra en la Fig.7.6.

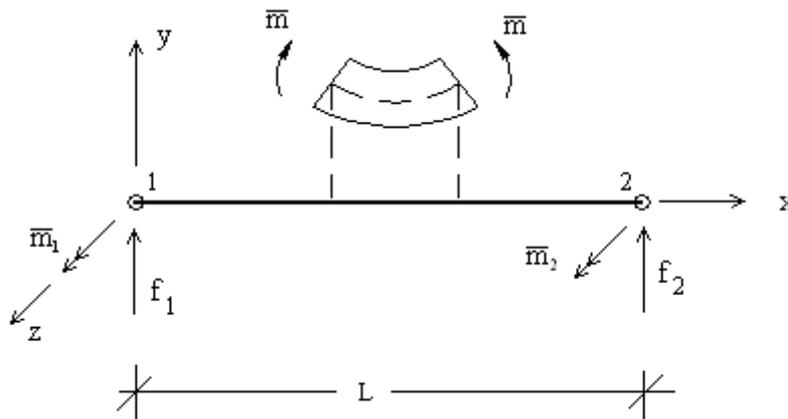


Fig.7.6. Acciones de extremo de miembro del elemento de viga de eje recto

Los momentos internos \bar{m} se definen como positivos cuando producen una curvatura positiva, tal como se muestra en la figura anterior. Luego, en los nodos del elemento se tiene, respectivamente, $\bar{m}_1 = -m_1$ y $\bar{m}_2 = m_2$. Para determinar f_1 y f_2 en términos de \bar{m}_1 y \bar{m}_2 , se hace uso de las ecuaciones de equilibrio estático a partir del diagrama de cuerpo libre del elemento seccionado a una distancia x , tal como se muestra en la Fig.7.6.

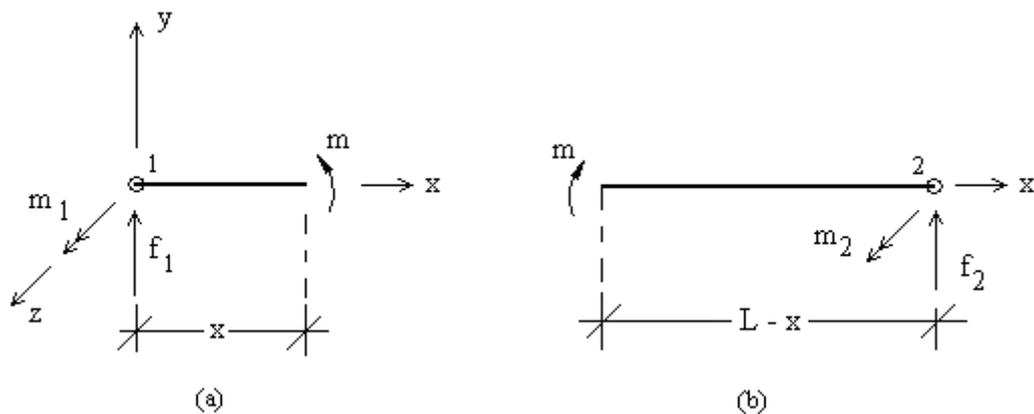


Fig.7.6. Diagrama de cuerpo libre del elemento de viga seccionado

Los requisitos de equilibrio estático para el elemento de la izquierda mostrado en la Fig.7.6a, conducen a:

$$\sum M_z = 0 = -f_1 x + m_1 + m \Rightarrow -f_1 x + m_1 = -m \quad (7.19a)$$

y para el elemento de la Fig.6.7b:

$$\sum M_z = 0 = f_2 (L - x) + m_2 - m \Rightarrow f_2 (L - x) + m_2 = m \quad (7.19b)$$

Luego, de las ecs.(7.19a) y (7.19b), se obtiene:

$$f_1 x - m_1 = f_2 (L - x) + m_2$$

$$\text{Para } x=0 \Rightarrow -m_1 - m_2 = f_2 L \Rightarrow f_2 = \frac{-m_1 - m_2}{L} \quad (7.20)$$

en el nodo 1 el equilibrio debe verificar:

$$m_1 \left(\begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \downarrow \end{array} \right) \bar{m}_1$$

$$m_1 = -\bar{m}_1$$

la ec.(7.20a) se transforma en:

$$f_2 = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{L} \quad (7.21)$$

$$\text{y, para } x=L \Rightarrow f_1 L - m_1 = m_2 \Rightarrow f_1 = \frac{m_2 + m_1}{L} \quad (7.22)$$

De igual modo, en el nodo 2:

$$\bar{m}_2 \left(\begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \uparrow \end{array} \right) m_2$$

$$m_2 = \bar{m}_2$$

y, por lo tanto, la ec.(7.22) se transforma en:

$$f_2 = \frac{\bar{m}_1 - \bar{m}_2}{L} \quad (7.23)$$

Luego, en forma matricial, las ecs.(7.21) y (7.23) se escriben como:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -L & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{m}_1 \\ \bar{m}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.24)$$

Sustituyendo la ec.(7.18) en la ec.(7.24), se obtiene, finalmente, la matriz local de rigidez del elemento de viga de eje recto.

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ m_1 \\ f_2 \\ m_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} \quad (7.25)$$

APÉNDICES

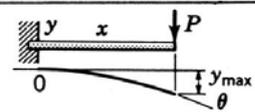
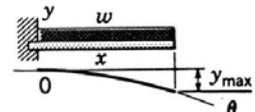
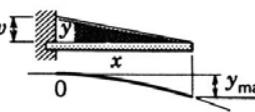
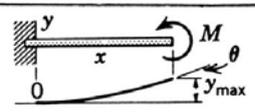
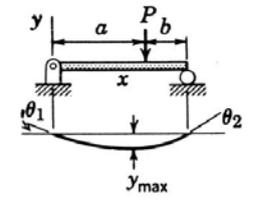
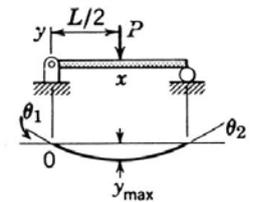
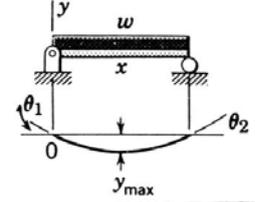
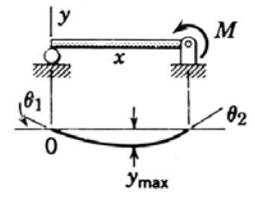
Tabla 1. Deflexiones y Pendientes			
Caso	Carga y Apoyos (Longitud: L)	Pendiente en el Extremo (+)	Deflexión Máxima (+ Hacia Arriba)
1		$\theta = -\frac{PL^2}{2EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{PL^3}{3EI}$ en $x = L$
2		$\theta = -\frac{wL^3}{6EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{wL^4}{8EI}$ en $x = L$
3		$\theta = -\frac{wL^3}{24EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{wL^4}{30EI}$ en $x = L$
4		$\theta = +\frac{ML}{EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = +\frac{ML^2}{2EI}$ en $x = L$
5		$\theta_1 = -\frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI}$ en $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{Pa(L^2 - a^2)}{6LEI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{Pb(L^2 - b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}LEI}$ en $x = \sqrt{(L^2 - b^2)}/3$ $y_{\text{en el centro no max}} = -\frac{Pb(3L^2 - 4b^2)}{48EI}$
6		$\theta_1 = -\frac{PL^2}{16EI}$ en $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{PL^2}{16EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{PL^3}{48EI}$ en $x = L/2$
7		$\theta_1 = -\frac{wL^3}{24EI}$ en $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{wL^3}{24EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{5wL^4}{384EI}$ en $x = L/2$
8		$\theta_1 = -\frac{ML}{6EI}$ en $x = 0$ $\theta_2 = +\frac{ML}{3EI}$ en $x = L$	$y_{\max} = -\frac{ML^2}{9\sqrt{3}EI}$ en $x = L/\sqrt{3}$ $y_{\text{en el centro no max}} = -\frac{ML^2}{16EI}$

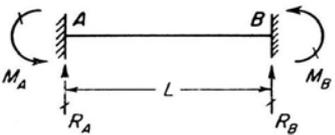
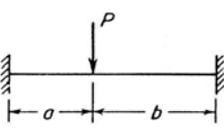
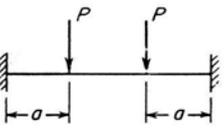
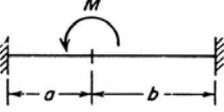
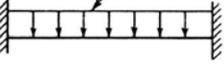
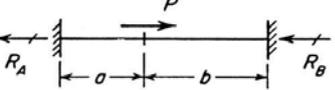
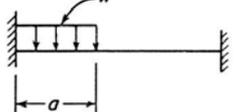
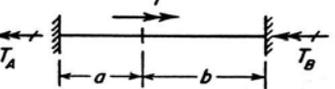
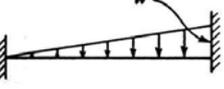
Tabla 2. - Acciones de extremo fijo debido a cargas	
	
<p>1</p>  $M_A = \frac{Pab^2}{L^2} \quad M_B = -\frac{Pa^2b}{L^2}$ $R_A = \frac{Pb^2}{L^3} (3a + b) \quad R_B = \frac{Pa^2}{L^3} (a + 3b)$	<p>5</p>  $M_A = -M_B = \frac{Pa}{L} (L - a)$ $R_A = R_B = P$
<p>2</p>  $M_A = \frac{Mb}{L^2} (2a - b)$ $M_B = \frac{Ma}{L^2} (2b - a)$ $R_A = -R_B = \frac{6Mab}{L^3}$	<p>6</p>  $M_A = -M_B = \frac{wL^2}{12}$ $R_A = R_B = \frac{wL}{2}$
<p>3</p>  $R_A = \frac{Pb}{L} \quad R_B = \frac{Pa}{L}$	<p>7</p>  $M_A = \frac{wa^2}{12L^2} (6L^2 - 8aL + 3a^2)$ $M_B = -\frac{wa^3}{12L^2} (4L - 3a)$ $R_A = \frac{wa}{2L^3} (2L^3 - 2a^2L + a^3)$ $R_B = \frac{wa^3}{2L^3} (2L - a)$
<p>4</p>  $T_A = \frac{Tb}{L} \quad T_B = \frac{Ta}{L}$	<p>8</p>  $M_A = \frac{wL^2}{30} \quad M_B = -\frac{wL^2}{20}$ $R_A = \frac{3wL}{20} \quad R_B = \frac{7wL}{20}$

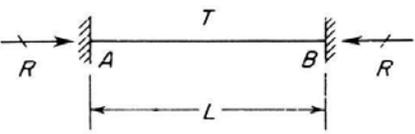
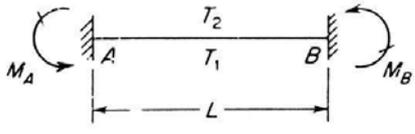
Tabla 3.- Acciones de extremo fijo debido a cambios de temperatura	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;">1 Incremento Uniforme de Temperatura</div>  <p style="text-align: center;">$R = EA\alpha T$</p> <p>$E =$ Módulo de elasticidad $A =$ Área de la sección transversal $\alpha =$ Coeficiente de expansión térmica $T =$ Incremento de temperatura</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;">2 Gradiente de Temperatura Lineal</div>  <p style="text-align: center;">$M_A = -M_B = \frac{\alpha EI(T_1 - T_2)}{d}$</p> <p>$I =$ Momento de Inercia $T_1 =$ Temperatura de la viga arriba $T_2 =$ Temperatura en la viga abajo $d =$ Altura de la viga</p>

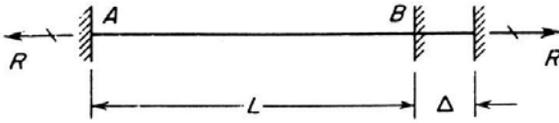
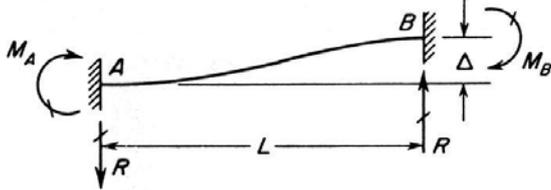
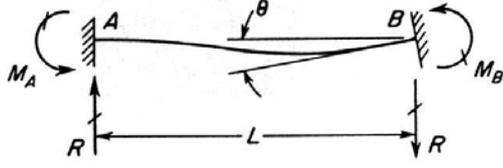
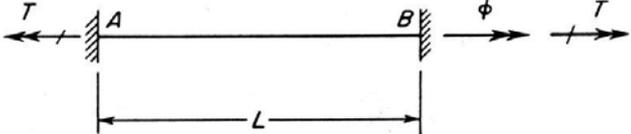
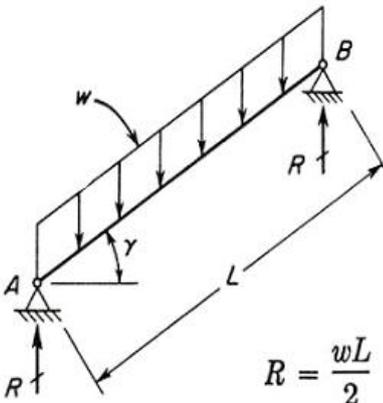
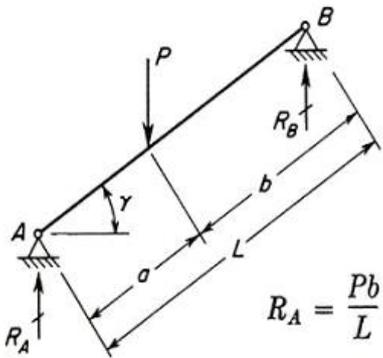
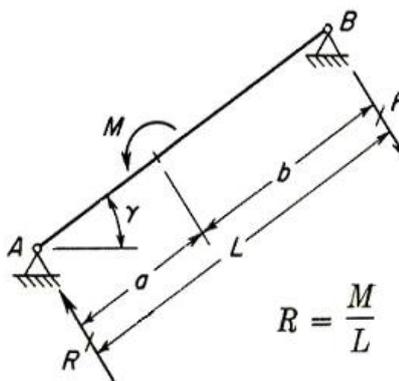
Tabla 4.- Acciones de extremo fijo debido a desplazamientos de extremo	
1	 $R = \frac{EA\Delta}{L}$
2	 $M_A = M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad R = \frac{12EI\Delta}{L^3}$
3	 $M_A = \frac{2EI\theta}{L} \quad M_B = \frac{4EI\theta}{L} \quad R = \frac{6EI\theta}{L^2}$
4	 $T = \frac{GJ\phi}{L}$ <p style="text-align: center;"> <i>G</i> = Módulo de rigidez <i>J</i> = Momento polar de inercia </p>

Tabla 5.- Acciones de empotramiento debido a deformaciones previas	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;">1 Barra con exceso de longitud</div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> </div> $R = \frac{EAe}{L}$ <p> <i>E</i> = Módulo de elasticidad <i>A</i> = Área de la sección transversal <i>e</i> = Longitud en exceso </p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px;">2 Barra con un quiebre</div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> </div> $M_A = \frac{2EI\theta}{L^2} (2L - 3a)$ $M_B = \frac{2EI\theta}{L^2} (L - 3a)$ $R_A = -R_B = \frac{6EI\theta}{L^3} (L - 2a)$ <p> <i>I</i> = Momento de Inercia θ = Ángulo de quiebre </p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-bottom: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;">3</div> <div style="text-align: center; margin-bottom: 10px;"> </div> $M_A = -M_B = \frac{8EIe}{L^2}$ <p> <i>e</i> = Curvatura inicial en el centro de la barra </p>	

Tabla 6. - Acciones de extremo para elementos de armadura	
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto; text-align: center; font-weight: bold;">1</div>  <p style="text-align: right; margin-right: 50px;">$R = \frac{wL}{2}$</p>	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto; text-align: center; font-weight: bold;">2</div>  <p style="text-align: right; margin-right: 50px;">$R_A = \frac{Pb}{L}$ $R_B = \frac{Pa}{L}$</p>
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 30px; margin: 0 auto; text-align: center; font-weight: bold;">3</div>  <p style="text-align: right; margin-right: 50px;">$R = \frac{M}{L}$</p>	

BIBLIOGRAFÍA

Existen muchos libros excelentes y también múltiples artículos en varias revistas sobre el análisis estructural en general, y sobre el análisis matricial de estructuras. A continuación se da una lista de libros y artículos que sirvieron de consulta para la elaboración de este texto. Algunos de ellos han sido usados en este trabajo sin ser citados explícitamente.

- 1.- **Felippa, C.A.**, "Parametrized unification of matrix structural analysis: classical formulation and conneted elements". Finite Element Analysis Des., 21, pp. 45-74, 1995.
- 2.- **Felippa, C.A.**, "A Historical Outline of Matrix Structural Analysis, A Play in Three Acts". Department of Aeospace Engineering Sciences and Center for Aerospace Structures. University of Colorado. June,2000.
- 3.- **Duncan W.J., Collar, A.R.**, "A method for the solutions of oscillations problems by matrices". Phd. Mag. Series 7, 17, pp. 865. 1934.
- 4.- **Duncan, W.J., Collar, A. R.**, "A method for the solutions of oscillations problems by matrices". Phil. Mag. Series 7, 19, pp. 197. 1935.
- 5.- **Frazer, R.A., Duncan, W.J., Collar, A.R.**, "Elemetary Matrices and some Applications to Dynamic and Differential Equations". Cambridge Uni. Press, 1st ed. 1938, 7th. 1963.
- 6.- **Argyris, J.H., Kelsey, S.**, "Energy Theorems and Structural Analysis", Butterworts, London, 1960. Part I, reprinted from Aircraft Engrg. 26, Oct-Nov 1954 and 27, April_may 1955.
- 7.- **Tunner, M.J.**, "The direct stiffness method of structural analysis". Structural and Materials Panel Paper. AGARD Meeting, Aachen, Germany, 1959.
- 8.- **Tunner, M.J., Martin, H.C., Weikel, R.C.**, " Further development and applications of the stiffness method". AGARD Structures and Material Panel, Paris, France, July 1962, in AGARDograph 72. Matrix Methods of Strucrural Analysis, ed. By B.M. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press. Oxford pp. 203-266, 1964.
- 9.- **Tunner, M.J., Clough, R.W., Martin, H.C., Topp, L.J.**, "Stiffness and deflection analysis of complex structures". J. Aero. Sci., 23,pp.805-824, 1956.
- 10.- **Melosh, R.J.** " Bases for the derivation of matrices for the direct stiffness method". AIAA. J. 1, pp. 1634-1637, 1963.
- 11.- **Timoshenko, S.P.**, "History of Strengh of Material". McGraw-Hill, New York, 1953 (Dover edition, 1963).

- 12.- **Przemieniecki, J.S.**, "Theory of Matrix Structural analysis". McGraw-Hill, 1968 .
- 13.- **Duncan, W.J., Collar, A.R.**, "Matrice applied to the motions of damped systems". Phil. Mag. Series 7, 17, pp. 865. 1934.
- 14.- **Mc Guire, W., Gallagher, R., Ziemian, R.**, "Matrix Structural Analysis". Wiley & Sons 2000.
- 15.- **Sennet, R. E.** "Matrix Analysis of Structures". Waveland Press 1994.
- 16.- **Weaver, W., Gere J.**, "Matriz Análisis of Framed Structures". D. van Nostrand. 1980.
- 17.- **Mc Cormac-Nelson**, "Análisis de Estructuras: Métodos Clásico y Matricial". Alfaomega 2002.
- 18.- **Gere, J. & Weaver, W.**, "Análisis de Estructuras Reticulares". C.E.C.S.A. 1965.
- 19.- **Meek, J.** "Matrix Analysis of Framed Structures". D. van Nostrand 1980.
- 20.- **Da Fonseca, Z.** "El Método de los Elementos Finitos: Una Introducción". Notas de clase. LUZ 2000.
- 21.- **Da Fonseca, Z.** "Análisis Matricial de Estructuras". Notas de clase. LUZ 2006.
- 22.- **Kassimali, A.** "Structural Analysis". Thomson. 3ra. Edición. 2005.
- 23.- **Laible, J. P.** "Análisis Estructural". McGraw-Hill. 1992.
- 24.- **Weaver, W. & Johnston, P.** " Finite Elements for Structural Analysis". Prentice Hall, 1984.
- 25.- **Logan, D. L.**, "A First Course in the Finite Element Method". PWS Publishing Co. 1993.
- 26.- **Kardestuncer, H.**, "Introducción al Análisis Estructural con Matrices". Mc Graw-Hill.
- 27.- **Castigliano, A.**, "Nuova teoria intorno all' equilibrio dei sistem elasticcs". Trans. Acad. Sci. (Turin), 11, 127-286, 1876.
- 28.- **Castigliano, A.**, "Theorème de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications". Paris, 1879. (Note: An English translation by E. S. Andrews, Eastic Stresses in Structures, was published in 1919 by Scott, Greenwood and Son, London.)

- 29.- **Claypeyron, B. P. E.**, “Comtes Rendus”, 45, 1067, 1857.
- 30.- **Coulomb, C.A.**, “Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l’architecture”., Memoirs de Mâthématique et de Physique, pp. 343-382, 1776.
- 31.- **Cross, H.**, “ Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moments”., Proc. Am. Civ. Engrs., May, 1930.
- 32.- **Maney, G. A.**, “Studies in Engineering”. N° 1. University of Minnesota, 1915.
- 33.- **Maxwell, J. C.**, “ On the calculations of the Equilibrium and Stiffness of Frames”, Phil. Mag. (4), 27,294,1864.
- 34.- **Mohr, O.**, “Beitrag zur Theorie der Holz un Eisen Konstruktionen”. Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Verdines zu Hannover, 1868.
- 35.- **Müller-Breslau, H., F. B.**, “Die Neuren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen”. Berlin, 1886.
- 36.- **Navier, L. M. H.**, “Résumé des leçons dones à l’ecole des Ponts et Chaussées sur l’application de la mécanique à l’établissement des constructions et des machines”. 1826.
- 37.- **Southwell, R. V.**, “An Introction to the Theory of Elasticity”. London: Oxford University Press, 1936.
- 38.- **Westergaard, H. M.**, “ One Hundred Fifty Years Advanced in Structural Analysis”. Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., 94, 226-240, 1930.
- 39.- **Dym, C. L., Shames, I. H.**, “Solid Mechanics a Variational Approach”. MacGraw-Hill. 1973.

Análisis matricial de estructuras reticulares
Maracaibo, Venezuela