Capítulo 6

El modelo lineal general, mixto y sus estimaciones máximo verosímiles

Hartley y Rao (1967) propusieron el método de máxima verosimilitud (ML) para estimar parámetros en modelos lineales mixtos, este método se basa en maximizar la función de verosimilitud de los parámetros a estimar. Lo anteriormente dicho es un tanto complicado, más en el marco de estimación de componentes de varianza genéticos, pero de forma general el método ML se basa en derivar el logaritmo de la función de verosimilitud (donde se asume normalidad) en función de los parámetros y resolver el sistema de ecuaciones resultante, lo que genera un estimador de la varianza fenotípica que viene dado por:

$$\sigma_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{ij} - \overline{y}\right)}{n}$$

Y en el caso de muchos efectos fijos (Blasco, 2021):

$$\sigma_p^2 = \frac{(y - Xb)'(y - Xb)}{n}$$

Esta definición de σ_p^2 esta sesgada, ya que está asociada a “n” grados de libertad, por lo tanto, es un estimador confiable solo con muestras de gran tamaño. Una descripción muy buena del método se puede encontrar en Searle et al. (1992).

La función de verosimilitud es igual al producto de la función densidad conjunta de los datos, asociados a los parámetros a estimar, esto es para el modelo lineal general, igual a:

$$L = \prod f\left(\mu, \sigma_w^2, \sigma_s^2\right)$$

Asumiendo normalidad la función sigue la distribución normal, por lo tanto, todos los datos se distribuyen normalmente. Los parámetros a estimar se encuentran maximizando esta función, pero se alcanza el mismo punto, maximizando su logaritmo, por lo tanto, en la práctica se maximiza:

$$Ln[L]$$

El logaritmo de L para los parámetros del modelo (lineal general) y la distribución normal con data balanceada es:

$$Log\left(L\right) = -\frac{1}{2} N \ln\left(2\pi\right) - \frac{1}{2} s\left(k-1\right) \ln\left(\sigma_w^2\right) - \frac{1}{2} s \ln \gamma - \frac{SCw}{2\sigma_w^2} - \frac{SCs}{2\gamma} - \frac{sk\left(\bar{y}..-\mu\right)^2}{2\gamma}$$

Donde:

$$\gamma = \sigma_w^2 + k_1 . \sigma_s^2$$

Para encontrar el máximo de esta expresión, se deriva en función de los parámetros y se iguala a cero:

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial \mu} = \frac{sk\left(\bar{y}..-\mu\right)}{\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial \sigma_w^2} = \frac{s\left(k-1\right)}{2\sigma_w^2} + \frac{SCw}{2\sigma_w^4} = 0$$

$$\frac{\partial Ln(L)}{\partial \gamma} = -\frac{s}{2\gamma} + \frac{SCs}{2\gamma^2} + \frac{sk\left(\bar{y}..-\mu\right)^2}{2\gamma^2} = 0$$

Este sistema de ecuaciones tiene como solución única:

$$\mu = \overline{y}$$

$$\sigma_w^2 = CMw$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{1}{s}\right) CMs$$

Por lo tanto:

$$\sigma_s^2 = \frac{\gamma - CMe}{k} = \frac{\left(1 - \frac{1}{s}\right) CMs - CMe}{k}$$

Los estimadores máximos verosímiles, para el modelo mixto con dos factores sin interacción y data balanceada son:

$$\sigma_s^2 = \frac{\frac{SCs}{s} - \sigma_w^2}{bk}$$

$$\sigma_s^2 = \left[1 - \frac{b-1}{s(bk-1)}\right] CMw$$

Y con efecto de interacción:

$$\sigma_w^2 = CMw$$

$$\sigma_s^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{s}\right)(CMs - CMsb)}{bk}$$

$$\sigma_{sb}^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{s}\right) * CMsb - CMw}{k}$$

Ejemplo 5.

Se usaron los datos de los ejemplos 2, 3 y 4 para mostrar el cálculo de los estimadores con el método ML.

Cálculo con el ejemplo 2.

Estimaciones máximo verosímiles:

$$\sigma_w^2 = 2333.896$$

$$\sigma_s^2 = \frac{\left(1 - \frac{1}{5}\right) 4299.25 - 2333.9}{8} = 138.2$$

Por lo tanto, la varianza fenotípica es:

$$\sigma_{\mathrm{p}(ML)}^2 = 138.2 + 2333.9 = 2472.1$$

Lo que lleva al cálculo del índice de herencia:

$$h_{ML}^2 = \frac{4\left(138.2\right)}{2333.9 + 138.2} = 0.22$$

Uso del SAS.

```
data gallinas3;
input x y @@;
cards;
1 687 2 618 3 618 4 600 5 717
1 691 2 680 3 687 4 657 5 658
1 793 2 592 3 763 4 669 5 674
1 675 2 683 3 747 4 606 5 611
1 700 2 631 3 678 4 718 5 678
1 753 2 691 3 737 4 693 5 788
1 704 2 694 3 731 4 669 5 650
1 717 2 732 3 603 4 648 5 690
;
proc mixed method=ML;
class x;
model y = ;
random x;
run;
quit;
```

Tabla 13
Método ML caso balanceado

The Mixed Procedure	
Covariance Parameter Estimates	
Cov Parm	Estimate
x	138.20
Residual	2333.90

Cálculo con el ejemplo 3.

Estimaciones máximo verosímiles:

$$\sigma^2_{animal} = \frac{\frac{2.6}{6} - 0.082}{10} = 0.035$$

$$\sigma^2_w = \left[1 - \frac{2-1}{6\left(2\left(5\right)-1\right)}\right]0.084 = 0.082$$

Y, el índice de constancia es:

$$R_{(ML)} = \frac{0.035}{0.082 + 0.035} = 0.29$$

Uso del SAS.

```
data pavos2;
input pavo operador y @@;
   datalines;
1 1 2.3 2 1 2.2 3 1 2.1 4 1 2.3 5 1 2.1 6 1 2.0
1 2 2.2 2 2 3.1 3 2 2.6 4 2 2.4 5 2 2.0 6 2 1.9
1 1 2.2 2 1 2.7 3 1 2.7 4 1 2.1 5 1 2.2 6 1 2.6
1 2 3.0 2 2 2.2 3 2 2.0 4 2 2.6 5 2 2.0 6 2 2.5
1 1 2.4 2 1 2.5 3 1 1.9 4 1 2.0 5 1 2.0 6 1 2.3
1 2 2.8 2 2 2.6 3 2 1.9 4 2 1.7 5 2 1.8 6 2 2.0
1 1 2.6 2 1 2.9 3 1 1.8 4 1 2.4 5 1 2.0 6 1 2.5
1 2 2.5 2 2 2.3 3 2 2.3 4 2 2.1 5 2 1.7 6 2 2.2
1 1 2.2 2 1 2.2 3 1 2.1 4 1 2.5 5 1 1.8 6 1 2.0
1 2 2.3 2 2 3.0 3 2 2.2 4 2 2.7 5 2 1.7 6 2 1.7
```

```
;
proc mixed method=ML;
   class pavo operador;
   model y=operador ;
   random pavo;
run;
```

Tabla 14
Método ML, caso balanceado modelo mixto

The Mixed Procedure	
Covariance Parameter Estimates	
Cov Parm	**Estimate**
pavo	0.03500
Residual	0.08269

Cálculo con el ejemplo 4.

Estimaciones máximo verosímiles:

$$\sigma_w^2 = 1.98333$$

$$\sigma^2_{animal} = \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)(21.23335 - 18.6333)}{10} = 0.17333$$

$$\sigma^2_{animal*racion} = \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)18.6333 - 1.9833}{5} = 2.08$$

Uso del SAS.

```
proc mixed method=ML;
class racion cerdo;
model y = racion;
random cerdo cerdo*racion;
run;
```

Tabla 15
Método ML, modelo mixto con interacción balanceado

Covariance Parameter Estimates	
Cov Parm	**Estimate**
cerdo	0,1733
racion*cerdo	2,0878
Residual	1,9833